

В. В. У ч а й к и н (Ульяновск, УлГУ). **Дробно-дифференциальная модель рассеяния светового луча в турбулентной среде.**

В теории многократного рассеяния света в турбулентной оптически прозрачной среде используется кинетическая модель, в рамках которой поток света рассматривается как поток частиц (фотонов). Дифференциальное сечение рассеяния на единице длины пути $w(\theta)$ выражается через спектральную плотность (трансформанту Фурье) корреляционной функции диэлектрической постоянной $\varepsilon(\mathbf{r})$

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathbf{R}^3} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \langle [\varepsilon(\mathbf{r}_1) - \bar{\varepsilon}] [\varepsilon(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) - \bar{\varepsilon}] \rangle d\mathbf{r}.$$

В статистически однородной и изотропной турбулентной среде спектральная плотность зависит только от абсолютной величины векторного аргумента $q = |\mathbf{q}|$, и эта связь выражается соотношением $w(\theta) = (1/2)\pi k_0^4 \Phi_\varepsilon(q)$, где $q = 2k_0 \sin(\theta/2)$, а k_0 — волновое число в однородной среде с диэлектрической постоянной $\bar{\varepsilon}$. В инерционном интервале волновых чисел, согласно колмогоровскому закону двух третей, $\Phi_\varepsilon(q) = Cq^{-11/3}$, $C = \text{const}$ (уравнение (26.31) работы [1]). Наиболее вероятно рассеяние на малые углы, для которых

$$w(\theta) = \frac{1}{2}\pi k_0^4 C [2k_0 \sin \theta/2]^{-11/3} \sim A\theta^{-\alpha-2}, \quad \theta \rightarrow \infty, \quad A = \text{const}, \quad \alpha = 5/3. \quad (1)$$

Пусть в начале координат находится точечный мононаправленный источник света. Выберем координатную ось OZ совпадающей с этим первичным направлением Ω_0 . В малоугловом приближении теории рассеяния координата z фотона отождествляется с пройденным им путем, а для характеристики отклонения его от первоначального направления используется двумерный вектор $\mathbf{u} = \{\Omega_x, \Omega_y\}$, область изменения которого расширяется на всю плоскость: $-\infty < u_x < \infty$, $-\infty < u_y < \infty$. Соответствующее данному приближению кинетическое уравнение для углового распределения имеет вид [2]:

$$\frac{\partial f(z, \mathbf{u})}{\partial z} = \int_{\mathbf{R}^2} [f(z, \mathbf{u} - \mathbf{u}') - f(z, \mathbf{u})] w(|\mathbf{u}'|) d\mathbf{u}', \quad f(0, \mathbf{u}) = \delta(\mathbf{u}). \quad (2)$$

Оно подобно уравнению, описывающему многократное рассеяние заряженных частиц в веществе. По мере увеличения глубины распределение $f(z, \mathbf{u})$ все больше уширяется, и разность в квадратных скобках становится все меньше; разлагая уменьшаемое в ряд по $\mathbf{u}'$ и выполняя интегрирование (т. е., усредняя по изотропно распределенному углу рассеяния), приходят к известному уравнению типа Фоккера–Планка для главной асимптотической части решения $f^{\text{as}}(z, \mathbf{u})$:

$$\frac{\partial f^{\text{as}}(z, \mathbf{u})}{\partial z} = \frac{\langle u^2 \rangle}{2} \Delta_2 f^{\text{as}}(z, \mathbf{u}),$$

где $\Delta_2 = \partial^2/\partial u_x^2 + \partial^2/\partial u_y^2$ и $\langle u^2 \rangle = \int_{\mathbf{R}^2} w(|\mathbf{u}|) u^2 d\mathbf{u}$ — средний квадрат угла рассеяния на единице длины пути.

В рассматриваемой же задаче этот интеграл расходится, и вместо разложения в ряд мы воспользуемся асимптотической подстановкой (1):

$$\frac{\partial f^{\text{as}}(z, \mathbf{u})}{\partial z} = AJ(\mathbf{u}), \quad J(\mathbf{u}) = \int_{\mathbf{R}^2} [f^{\text{as}}(z, \mathbf{u} - \mathbf{u}') - f^{\text{as}}(z, \mathbf{u})] |\mathbf{u}'|^{-\alpha-2} d\mathbf{u}'. \quad (3)$$

При $\alpha \geq 1$ интеграл столкновений расходится, и для устранения этой расходимости воспользуемся процедурой регуляризации Адамара, заменяющей расходящийся интеграл $J(\mathbf{u})$ его конечной (в смысле Адамара) частью

$$\text{p.f. } J(\mathbf{u}) \equiv \int_{\mathbf{R}^2} [f^{\text{as}}(z, \mathbf{u} - 2\mathbf{u}') - 2f^{\text{as}}(z, \mathbf{u} - \mathbf{u}') + f^{\text{as}}(z, \mathbf{u})] |\mathbf{u}'|^{-\alpha-2} d\mathbf{u}'.$$

Согласно [3], регуляризованный таким образом интеграл выражается через дробную степень двумерного лапласиана соотношением

$$\int_{\mathbf{R}^2} [f^{\text{as}}(z, \mathbf{u} - 2\mathbf{u}') - 2f^{\text{as}}(z, \mathbf{u} - \mathbf{u}') + f^{\text{as}}(z, \mathbf{u})] |\mathbf{u}'|^{-\alpha-2} d\mathbf{u}' = -c(\alpha)(-\Delta_2)^{\alpha/2},$$

$$c(\alpha) = \frac{\pi^2(1 - 2^{1-\alpha})}{[\Gamma(1 - \alpha/2)]^2 \sin(\alpha\pi/2)}.$$

Следовательно, асимптотическое поведение углового распределения $f^{\text{as}}(z, \mathbf{u})$ фотонов, прошедших путь x в турбулентной среде, описывается уравнением с двумерным лапласианом дробного порядка:

$$\frac{\partial f^{\text{as}}(z, \mathbf{u})}{\partial z} = -c(\alpha)A(-\Delta_2)^{\alpha/2}f^{\text{as}}(z, \mathbf{u}), \quad f(0, \mathbf{u}) = \delta(\mathbf{u}).$$

Решение этого уравнения выражается через двумерную изотропную устойчивую плотность Леви–Фельдгейма с характеристическим показателем $\alpha = 5/3$

$$g_2^{(\alpha)}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-k^\alpha} J_0(kr) k dk$$

соотношением:

$$f^{\text{as}}(z, \mathbf{u}) = [c(\alpha)Az]^{-2/\alpha} g_2^{(\alpha)}([c(\alpha)Az]^{-1/\alpha} |\mathbf{u}|).$$

Отметим три характерных отличия рассеяния в турбулентной среде от аналогичного процесса в среде с мелкомасштабными флуктуациями коэффициента преломления: ширина углового распределения рассеянных фотонов растет с глубиной пропорционально $z^{3/5}$, а не $z^{1/2}$ (т.е. быстрее), хвосты распределения имеют степенной, а не гауссов вид, и проекции вектора $\mathbf{u}$ на оси x и y не являются независимыми.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 07-01-00517.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Т. 2. М.: Наука, 1978.
2. Кольчужкин А. М., Учайкин В. В. Введение в теорию прохождения частиц через вещество. М.: Атомиздат, 1978.
3. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.