

Е. А. Семенчин, Е. О. Лоскутова (Краснодар, КубГУ). **Об одной обратной задаче в математической модели рассеяния примеси в атмосфере.**

Математическая модель рассеяния примеси в $E_+^3 = \{(x, y, z): x, y \in (-\infty, +\infty), z \in [z_0, \infty), z_0 \geq 0\}$ имеет вид [1]:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial x} - W \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q}{\partial z}, \quad t \in [t_0, T], \quad (1)$$

$$q(t_0, x, y, z) = \varphi(x, y, z_0), \quad (2)$$

$$\left\{ K_x \frac{\partial q}{\partial z} + W q \right\} \Big|_{z=z_0} = \{V_s q\} \Big|_{z=z_0}, \quad (3)$$

$$q(t, x, y, z) \rightarrow 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где $q(t, x, y, z)$ — среднее значение концентрации примеси в момент времени t в точке (x, y, z) ; K_x, K_y, K_z — коэффициенты турбулентной диффузии, соответственно, вдоль осей Ox, Oy, Oz ; U — компонента средней скорости ветра вдоль оси Ox ; W — скорость осаждения частиц примеси вдоль оси Oz ; $\varphi(x, y, z)$ — фоновая концентрация (часто полагают $\varphi(x, y, z) = 0$); V_s — скорость сухого осаждения; $z_0 = \text{const} > 0$ — уровень шероховатости подстилающей поверхности (уровнем шероховатости часто пренебрегают, полагая $z_0 = 0$); f — функция источника.

Если источник является точечным непрерывного действия с координатами $(0, 0, H)$, то $f(t, x, y, z) = Q(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z - H)$, где $Q(t)$ — функция аргумента $t \in [t_0, T]$ (называемая *мощностью источника*), значения которой равны количеству (массе) примеси, выбрасываемой источником в момент времени t .

Согласно [1], плотность осадка $\bar{P}(t, x, y, z)$, т. е. количество примеси, выпавшей в точке (x, y) на высоте H за время действия источника t , может быть рассчитана по формуле

$$\bar{P}(t, x, y, z) = V_s \int_0^t \int_0^T \bar{q}(s, 0, 0, H; t, x, y, z) Q(s) ds d\tau, \quad (5)$$

где $\bar{q}(s, 0, 0, H; t, x, y, z)$ — функция Грина, определяемая из следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} - W \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \bar{q}}{\partial z}, \quad t \in [t_0, T], \quad (6)$$

$$\bar{q}(t_0, x, y, z) = \delta(x - \xi)\delta(y - \eta)\delta(z - \theta), \quad (7)$$

$$\left\{ K_x \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} + W \bar{q} \right\} \Big|_{z=z_0} = \{V_s \bar{q}\} \Big|_{z=z_0}, \quad (8)$$

$$\bar{q}(t, x, y, z) \rightarrow 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty, \quad z \geq z_0. \quad (9)$$

Задачу определения плотности осадка $\bar{P}(t, x, y, z)$ из (5)–(9) для точечного источника непрерывного действия по заданным $U, W, K_x, K_y, K_z, Q(t)$ назовем *прямой задачей определения плотности осадка*. В работе, представленной данным сообщением, изучается обратная к ней задача: по заданным в (1)–(5) U, W, K_x, K_y, K_z найти $Q(s)$ (предполагается, что $\bar{P}, V_s$ определяются по экспериментальным данным).

Соотношение (5) эквивалентно двум:

$$\bar{P}(t, x, y, z_0) = V_s \int_0^t q(\tau, x, y, z_0) d\tau, \quad (10)$$

$$q(\tau, x, y, z_0) = \int_0^t \bar{q}(s, 0, 0, H; \tau, x, y, z_0) Q(s) ds. \quad (11)$$

Если $Q(s)$ аппроксимировать полиномом N -й степени: $Q(s) = \sum_{i=0}^N C_i s^i$, $C_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, N$, то можно убедиться, что задача минимизации функционала

$$\begin{aligned} \overline{P}^\alpha(t) &= \|\overline{P}Q - \overline{P}_\delta\|_{L_2[0,t]}^2 + \alpha\|Q\|_{L_2[0,t]}^2 \\ &= \int_0^t \left(\int_0^t q(s, x, y, z) Q(s) ds - \overline{P}_\delta(x) \right)^2 d\tau + \alpha \int_0^t Q^2(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

построенного для решения (10), (11) методом регуляризации по А.Н.Тихонову [2], сводится к решению системы алгебраических уравнений относительно C : $(\Gamma + \alpha R)C = U$, где $\Gamma = \{g_{ij}\}$ есть матрица Грамма с элементами вида $g_{ij} = (A\tau^i, A\tau^j)$, $A(\cdot) = \int_0^t ds \int_0^s \bar{q}(\tau, 0, 0, H; s, x, y, z)(\cdot) d\tau$, U — вектор с элементами вида $(A\tau^i, P_\delta)$, $R = \{r_{ij}\}$ — матрица с элементами вида (τ^i, τ^j) , α — параметр регуляризации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Семенчин Е. А. Аналитические решения краевых задач в математической модели атмосферной диффузии. Ставрополь: СКИУУ, 1993, 141 с.
2. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994, 208 с.