Н. М. Меженная (Москва, МИЭМ). **Многомерная нормальная теорема для числа монотонных серий заданной длины в равновероятной случайной последовательности.**

Пусть $X = \{X_0, \dots, X_T\}$ — последовательность независимых случайных величин, равномерно распределенных на множестве $\mathbf{A} = \{0, 1, \dots, N-1\}$. При $t = 1, 2, \dots, T-s$ определим события

$$E_{t,s} = \{X_{t-1} > X_t \leq X_{t+1} \leq \dots \leq X_{t+s-1} > X_{t+s}\}, \quad 0 < s < T,$$

каждое из которых означает, что в момент t началась монотонная серия знаков последовательности X длины s . Случайная величина

$$Y_s = \sum_{t=1}^{T-s} I\{E_{t,s}\}$$

равна числу монотонных серий длины s в последовательности X . Пусть

$$\tilde{Y}_{s,r} = \frac{1}{\sqrt{T}}(Y_s - \mathbf{M}Y_s, Y_{s+1} - \mathbf{M}Y_{s+1}, \dots, Y_{s+r} - \mathbf{M}Y_{s+r}), \quad r \geq 0.$$

Обозначим A_s количество монотонных последовательностей длины s из знаков алфавита $\mathbf{A}$, B_s — количество последовательностей длины $s+1$ из знаков алфавита $\mathbf{A}$, которые сами не являются монотонными, но становятся таковыми после удаления первого знака, а C_s — количество последовательностей длины $s+2$ из знаков алфавита $\mathbf{A}$, которые сами не являются монотонными, но становятся таковыми только после удаления обоих крайних знаков. Справедливы формулы

$$A_s = C_{N+s-1}^s, \quad B_s = NA_s - A_{s+1} = \frac{s(N-1)}{N+s} C_{N+s}^{s+1}, \quad C_s = NB_s - B_{s+1}.$$

Заметим, что $\mathbf{P}\{E_{t,s}\} = C_s/N^{s+2}$.

Теорема 1. Пусть параметры $s \geq 1$, $N \geq 2$ и $r \geq 0$ фиксированны, а $T \rightarrow \infty$. Тогда распределение случайного вектора $\tilde{Y}_{s,r}$ сходится к $(r+1)$ -мерному нормальному распределению с нулевым вектором средних и матрицей ковариаций $C = \|c_{s+i,s+j}\|_{i,j=0,\dots,r}$, где

$$c_{s,s+k} = 2 \left(\frac{B_{s+k}B_s - C_{2s+k}}{N^{2s+k+2}} + \frac{C_{s+k}B_s - B_{s+1}B_{s+k} + C_{2s+k+1}}{N^{2s+k+3}} \right) - (2s+k+3) \frac{C_s C_{s+k}}{N^{2s+k+4}}, \quad k > 0, \quad (1)$$

$$c_{s,s} = 2 \left(\frac{B_s^2 - C_{2s}}{N^{2s+2}} + \frac{C_s B_s - B_{s+1}B_s + C_{2s+1}}{N^{2s+3}} \right) - (2s+3) \frac{C_s^2}{N^{2s+4}} + \frac{C_s}{N^{s+2}}. \quad (2)$$

З а м е ч а н и е 1. Если параметры $s \geq 1$, $N \geq 2$ и $r > 0$ фиксированны, то в большинстве случаев компоненты вектора $\tilde{Y}_{s,r}$ в пределе при $T \rightarrow \infty$ оказываются независимыми. Исключение составляет пара случайных величин Y_2 и Y_3 при $N = 2$, которые асимптотически независимы при $T \rightarrow \infty$.

Перейдем к рассмотрению свойств длинных монотонных серий.

Теорема 2. Пусть параметры $N \geq 2$, $r \geq 0$ фиксированны, а $s, T \rightarrow \infty$ так, что $N^{3s}T^{-1}s^{7-3N} \rightarrow 0$. Тогда случайные величины

$$\sqrt{\frac{N^{s+k+2}(N-2)!}{T(N-1)s^{N-1}}} (Y_{s+k} - \mathbf{M}Y_{s+k}), \quad k = 0, 1, \dots, r,$$

асимптотически независимы в совокупности и имеют в пределе стандартное нормальное распределение.

В основе доказательств теорем 1 и 2 лежат оценки, предложенные в работе [1]. С их помощью нетрудно показать, что при любом $\alpha = (\alpha_s, \dots, \alpha_{s+r}) \in \mathbf{R}^{r+1} \setminus \{0^{r+1}\}$ для линейной комбинации $W_{s,r} = \alpha_s Y_s + \alpha_{s+1} Y_{s+1} + \dots + \alpha_{s+r} Y_{s+r}$ выполнено неравенство

$$\left| \mathbf{P} \left\{ \frac{W_{s,r} - \mathbf{M} W_{s,r}}{\sqrt{\mathbf{D} W_{s,r}}} < x \right\} - \Phi(x) \right| < \frac{C(s,r)T}{(\mathbf{D} W_{s,r})^{3/2}} \left(\max_{k=0,1,\dots,r} |\alpha_{s+k}| \right)^3,$$

где $C(s,r) = 32(1 + \sqrt{6})(r+1)(2s+2r+3)^2$. Далее остается воспользоваться известными свойствами многомерного нормального распределения (см. п. 4 § 13 гл. 2 книги [2]).

З а м е ч а н и е 2. Случай, когда члены последовательности X имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, исследуется аналогичным образом. Кстати, перейдя к пределу по $N \rightarrow \infty$ в формулах (1) и (2), можно получить выражения для элементов матрицы ковариаций предельного распределения для непрерывных случайных величин.

З а м е ч а н и е 3. Наряду с задачей об асимптотической нормальности числа длинных монотонных серий, может рассматриваться вопрос об условиях выполнения для него предельной теоремы Пуассона. В этом случае удается воспользоваться методом Чена–Стейна и показать, что эти условия имеют вид $T, s \rightarrow \infty, \mathbf{M} Y_s \rightarrow \lambda, 0 < \lambda < \infty$.

Для последовательности непрерывных случайных величин, распределенных равномерно на отрезке $[0, 1]$, этот подход был использован в [3]. В [4] для решения подобных задач использовался метод моментов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 05–01–00035) и Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ–4129.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Buldi P., Rinott Y.* On normal approximations of distributions in terms of dependency graph. — *Ann. Probab.*, 1989, v. 17, № 5, p. 1646–1650.
2. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989.
3. *Chryssaphinou O., Papastavridis S., Vaggelatos E.* Poisson limit theorems for the appearances of attributes. — In: *Stein's method and applications.* /Ed. by A.D. Barbour, L. H. Y. Chen. Singapore: Singapore Univ. Press, 2005, p. 19–35.
4. *Pittel B. G.* Limiting behavior of a process of runs. — *Ann. Probab.*, 1981, v. 9, p. 119–129.