

Г. Б. Маршалко, И. Г. Савастеев, И. В. Харламов
(Москва, ТВП). **О результатах статистического анализа списка «ТОР 500».**

Известный «закон Мура» в его современной трактовке предполагает удвоение производительности ЭВМ каждые 18 месяцев. На протяжении более 40 лет, прошедших после его формулировки [4], неоднократно предсказывался его «окончательный крах».

Источником данных о развитии производительности суперкомпьютеров является список «ТОР 500» [2]. Каждые 6 месяцев, начиная с июля 1993 г., данный ресурс сети Интернет представляет отчет о 500 наиболее производительных суперкомпьютеров в мире. При формировании отчета используются данные тестирования суперкомпьютеров с помощью теста «LINPACK», который основан на решении системы линейных уравнений.

Использовался логарифм по основанию 10 от данных, представленных в списке «ТОР 500». В этом случае зависимость принимает линейный вид $\varphi(t) = bt + a$. Для оценивания параметра b использовался метод наименьших квадратов (см., например, [1]).

Обозначим $X'_i, i = 0, \dots, n-1$ логарифм значения $X_i, i = 0, \dots, n-1$ реализации случайной величины ξ_i , описывающей результат i -го эксперимента, который можно представить в следующем виде:

$$X'_i = bt_i + a + \varepsilon_i, \quad i = 0, \dots, n-1,$$

где $\mathbf{E}\varepsilon_i = 0$, $\mathbf{D}\varepsilon_i = \sigma^2$ и распределение «ошибки» ε_i не зависит от параметров модели.

Значения b и a находятся из условия обращения в минимум разности квадратов

$$S(b, a) = \sum_{i=0}^{n-1} (X'_i - bt_i - a)^2.$$

Для рассматриваемой модели значения параметров определяются из следующих соотношений:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (t_i - \bar{t})(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=0}^{n-1} (t_i - \bar{t})^2}, \quad \hat{a} = \bar{X} - \bar{t}\hat{b},$$

где

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} t_i, \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X_i.$$

Вторые моменты и ковариация полученных оценок принимают вид:

$$D\hat{a} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} t_i^2}{n \sum_{i=0}^{n-1} (t_i - \bar{t})^2} \sigma^2, \quad D\hat{b} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=0}^{n-1} (t_i - \bar{t})^2},$$

$$\text{cov}(\hat{b}, \hat{a}) = -\frac{\bar{t}}{\sum_{i=0}^{n-1} (t_i - \bar{t})^2} \sigma^2.$$

Несмещенная оценка для остаточной дисперсии σ^2 имеет вид

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S(\hat{b}, \hat{a})}{n-2},$$

где

$$S(b, a) = \sum_{i=0}^{n-1} (X_i - X)^2 - \hat{b}^2 \sum_{i=0}^{n-1} (t_i - \bar{t})^2.$$

Оценивание производилось для различных данных — в качестве величин X_i , $i = 0, \dots, n - 1$ использовались значения максимальной производительности $R_{\max}$, теоретической пиковой производительности R_{peak} , по различным позициям каждого из списков, по суммарному значению производительности, по суммарной производительности суперкомпьютеров, находящихся на позициях из определенного диапазона. Для каждого случая вычислялись остаточная дисперсия и доверительный интервал.

Максимальное, минимальное и среднее значения оценки коэффициента b , определенные по максимальной производительности оказались равными: $b_{\max,1} = 0,278$, достигается для производительности суперкомпьютеров, находящихся в конце списка (на позициях с номерами 490, 495, 500); $b_{\min,1} = 0,245$, достигается для суммарной производительности суперкомпьютеров в списке; $b_{cp,1} = 0,265$.

Аналогичные значения для пиковой производительности, равны: $b_{\max,2} = 0,283$; $b_{\min,2} = 0,246$; $b_{cp,2} = 0,267$. Здесь мы не указали, на каких позициях достигаются данные значения, поскольку позиции рассматриваемых списков (упорядоченных по максимальной и пиковой производительности), вообще говоря, не соответствуют друг другу.

Таким образом, результаты оказались более близки к модели Дж. Донгарры [3], согласно которой вычислительные мощности в зависимости от времени t (в годах) растут пропорционально выражению $10^{(b_1+b_2)t}$, где $b_1 \approx 0,114$ определяет рост числа процессоров, а $b_2 \approx 0,146$ — рост производительности отдельного процессора. При этом величина $b_1 + b_2 \approx 0,26$ заметно больше, чем показатель $b \approx 0,2$, соответствующий «закону Мура».

Интересно отметить, что производительность суперкомпьютеров, находящихся на нижних позициях списка растет быстрее, чем производительность суперкомпьютеров, занимающих верхние строки списка. В частности, при сохранении существующих тенденций суммарная производительность 10 суперкомпьютеров, находящихся на позициях с 491 по 500, сравняется с производительностью суперкомпьютера, занимающего первую позицию в списке через 126 лет при расчете по максимальной производительности, и через 67 лет при расчете по пиковой производительности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Математическая статистика (учебное пособие для вузов). М.: Высшая школа, 1984, 248 с.
2. Список «TOP 500», <http://www.top500.org>.
3. *Dongarra J.* The Boole Lecture. Trends in high performance computing. — The Computer Journal, 2004, v. 47, № 4, p. 399–403.
4. *Moore G. E.* Cramming more components onto integrated circuits. — Electronics, 1965, v. 38, № 8, p. 114–117.