

А. Ю. Л и з у н о в (Москва, МФТИ). **Когда скрытая марковская цепь является марковской?**

Скрытой марковской цепью (СМЦ) называется случайный процесс $\eta_k = \pi(\xi_k)$, являющийся функцией от марковской цепи с конечным числом состояний $\{\xi_k\}$. Здесь $\pi: \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(A)}\} \rightarrow \{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(B)}\}$ ($B < A$) — «склеивающая» функция на пространстве состояний исходной марковской цепи.

В книге [1, гл.6.3], доказывается критерий того, что СМЦ будет являться марковской цепью при произвольном начальном распределении исходной марковской цепи. Там же, в гл.6.4, доказывается критерий марковости СМЦ для случая стационарной исходной марковской цепи, однако он не удобен для практического применения.

В работе, представленной данным сообщением, получена другая формулировка критерия марковости СМЦ от стационарной марковской цепи и показаны примеры ее эффективного применения.

Каждому состоянию $y^{(i)}$ СМЦ сопоставляется стандартное арифметическое пространство строк Π^i размерности $\dim(\pi^{-1}(y^{(i)}))$. Каждой паре $(i \in (1, 2, \dots, B), j \in (1, 2, \dots, B))$ сопоставляется линейное отображение $M_{ij}: \Pi^i \rightarrow \Pi^j$, задаваемое блоком матрицы переходных вероятностей марковской цепи, отвечающим группам состояний $\pi^{-1}(y^{(i)})$ и $\pi^{-1}(y^{(j)})$. Обозначим l стационарное распределение марковской цепи, l_i — ограничение вектора l на подмножество $\pi^{-1}(y^{(i)})$ $i \in (1, 2, \dots, B)$.

В каждом пространстве Π^i определим множество

$$V_i = \left\{ v \in \Pi^i : \exists \{y^{(k_1)}, y^{(k_2)}, \dots, y^{(k_n)}\} (k_n = i), v = l_{k_1} \cdot M_{k_1 k_2} \cdot M_{k_2 k_3} \cdots M_{k_{n-1} k_n} \right\}$$

векторов, которые можно получить, взяв в качестве начального вектора блок стационарного распределения марковской цепи и применив к нему произвольную последовательность отображений M_{ij} , заканчивающуюся в данном Π^i . Обозначим V_i пересечение линейной оболочки множества V_i с вероятностным симплексом S_i : $\tilde{V}_i = \text{span}(V_i) \cap S_i$.

Теорема (критерий марковости СМЦ). *СМЦ будет являться марковским процессом тогда и только тогда, когда для произвольной пары состояний y^i, y^j СМЦ выполнено: $M_{ij}(\tilde{V}_i) \perp R_j$, где R_j — вектор из единиц в пространстве Π^j .*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (07-01-00203-а)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970, 271 с.