Р. А. Оганян (Москва, МГОУ). **Явная формула для чисел m-арифметического треугольника.**

Пусть $C^n_{m,k}$ — число, стоящее на пересечении строки n и столбца k m-арифметического треугольника [1]. Производящая функция этих чисел имеет вид [1, 2]:

$$(1+x+\cdots+x^{m-1})^n=\sum_{k=0}^{(m-1)n}C^n_{m,k}x^k,\qquad m\in\mathbf{N},\quad n\in 0\cup\mathbf{N}.\tag{1}$$

Отсюда $C^n_{2,k}=C^k_n$. Теория этих чисел наиболее полно излагается в книгах [1, 2]. Однако явная формула для $C^n_{m,k}$ (в случае $m>2$) и в них отсутствует. Близкая проблема в случае $m=3$ ставится в [3]. В статье [4] мы вывели явную формулу для $C^n_{m,k}$, применив вариант формулы Бруно. Здесь мы значительно упростили доказательство.

Теорема 1. *Пусть $l=\min\{k,n\}$. Тогда для любого $m\in\mathbf{N}$ и $n\in 0\cup\mathbf{N}$*

$$C^n_{m,k}=\sum_{\substack{r_0+r_1+\cdots+r_{m-1}=n\\ r_1+2r_2+\cdots+(m-1)r_{m-1}=k\\ r_i=0,1,\dots,l}}\frac{n!}{r_0!\,r_1!\cdots r_{m-1}!},\qquad k=0,1,\dots,(m-1)n.\tag{2}$$

Из (1) и полиномиальности формулы получим

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{(m-1)n}C^n_{m,k}x^k&=\sum_{\substack{r_0+\cdots+r_{m-1}=n\\ r_i=0,\dots,n}}\frac{n!}{r_0!\cdots r_{m-1}!}x^{r_1}x^{2r_2}\cdots x^{(m-1)r_{m-1}}\\&=\sum_{\substack{r_0+\cdots+r_{m-1}=n\\ r_i=0,\dots,n}}\frac{n!}{r_0!\cdots r_{m-1}!}x^{r_1+2r_2+\cdots+(m-1)r_{m-1}}\\&=\sum_{k=0}^{(m-1)n}\sum_{\substack{r_0+r_1+\cdots+r_{m-1}=n\\ r_1+2r_2+\cdots+(m-1)r_{m-1}=k\\ r_i=0,1,\dots,l}}\frac{n!}{r_0!\cdots r_{m-1}!}x^k,\end{aligned}$$

отсюда следует (2).

Теорема 2. *В случае $m=3$ формулу (2) можно привести к виду*

$$C^n_{3,k}=\sum_{i=k-l}^{[k/2]}\frac{n!}{i!\,(k-2i)!\,(n-k+i)!},\qquad l=\min\{k,n\},\quad k=0,\dots,2n.\tag{3}$$

Пусть $S_{m,k}$ — множество решений диафантова уравнения $r_1+2r_2+\cdots+(m-1)r_{m-1}=k$, а $S^n_{m,k}$ — множество тех векторов $(r_1,\dots,r_{m-1})\in S_{m,k}$, для которых $r_1+r_2+\cdots+r_{m-1}\leqslant n$. Тогда формулу (2) можно записать в виде

$$C^n_{m,k}=\sum_{(r_1,\dots,r_{m-1})\in S^n_{m,k}}\frac{n!}{r_1!\cdots r_{m-1}!\,(n-r)!},\quad r=\sum_{i=1}^{m-1}r_i,\quad k=0,\dots,(m-1)n.\tag{4}$$

Легко видеть, что при $m=3$

$$s_{3,k} = \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} k & k-2 & \dots & k-2i & \dots & k-2[k/2] \\ 0 & 1 & \dots & i & \dots & [k/2] \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} k-2i \\ i \end{matrix} \right\}_{i=0}^{[r/2]},$$

отсюда

$$S^n_{3,k} = \{(r_1, r_2) \in S_{3,k} :\ r_1 + r_2 \leqslant n\} = \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} k-2i \\ i \end{matrix} \right\}_{i=k-l}^{[k/2]}, \qquad k = 0, \dots, 2n, \tag{5}$$

так как $r_1 + r_2 = k - i \leqslant n$ ($i = k - l, \dots, [k/2]$; $k = 0, \dots, 2n$). Действительно, при $i = k - l$ величина $r_1 + r_2 = l \leqslant n$, причем $k - i$ с увеличением i уменьшается, а с уменьшением i — увеличивается.

Теперь в (4) при $m = 3$, подставив вместо r_1 и r_2, соответственно, $k - 2i$ и i из (5), получим (3).

П р и м е р. Пусть $m = 3$, $k = 2$, $n = 4$, тогда $l = 2$, $k - l = 0$, $[k/2] = 1$ и

$$C^4_{3,2} = \sum_{i=0}^{1} \frac{4!}{i!\,(2-2i)!\,(2+i)!} = \frac{4!}{0!\,2!\,2!} + \frac{4!}{1!\,0!\,3!} = 6 + 4 = 10,$$

что совпадает с числом, стоящим на пересечении строки 4 и столбца 2 в 3-арифметическом треугольнике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. М.: 1969, с. 129–133, 245, 316–317.
2. *Бондаренко Б. А.* Обобщенные треугольники и пирамиды Паскаля, их фракталы, графы и приложения. Ташкент, 1990.
3. *Грэхам Р.*, *Кнут В.*, *Поташник О.* Конкретная математика. М., 1998, с. 417.
4. *Оганян Р. А.* Явная формула для m-полиномиальных коэффициентов. М.: Вестник МГОУ, 2006, в. 1, с. 97–114.