Б. Е. Бродский (Москва, ЦЭМИ РАН). **Обнаружение разладки в многомерных стохастических моделях: непараметрический подход.**

В работе, представленной данным сообщением, рассматривается задача последовательного обнаружения структурных сдвигов (разладок) в стохастических системах с неполной априорной информацией следующего вида:

$$Y(n) = \Pi X(n) + \nu_n, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

где $Y(n) = (y_{1n}, \dots, y_{Mn})'$ есть вектор эндогенных переменных, $X(n) = (x_{1n}, \dots, x_{Kn})'$ есть вектор предопределенных переменных (включая лаговые эндогенные), $\nu_n = (\nu_{1n}, \dots, \nu_{Mn})'$ есть вектор случайных ошибок; $'$ — символ транспонирования.

Матрица Π размерности $M \times K$ изменяется в неизвестный момент m, т. е.

$$\Pi = \Pi(n) = \mathbf{a}\, I\,\{n \leqslant m\} + \mathbf{b}\, I\,\{n > m\}, \qquad n = N, N+1, \dots,$$

где $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| > 0$.

На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ рассмотрим последовательность σ-алгебр $\mathcal{F}_n = \sigma\{Y(1), Y(2), \dots, Y(n)\}$, порожденных наблюдениями $Y(\cdot)$. Предикторы $X(n)$ и ошибки ν_n случайны и строго стационарны при следующих предположениях:

1) вектор $X(n) = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{Kn})'$ является $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримым.

2) существует такая непрерывная матричная функция $V(t)$, $t \in [0,1]$, что для любых $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{M}\, N^{-1} \sum_{j=[t_1 N]}^{[t_2 N]} X(j) X'(j) = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\, dt,$$

где $\int_{t_1}^{t_2} V(t)\, dt$ — положительно определенная матрица;

3) случайная последовательность $\{(X(n), \nu_n)\}$ удовлетворяет условию ψ-перемешивания и равномерному условию Крамера.

4) $\{\nu_n\}$ является мартингал-разностью относительно потока $\{\mathcal{F}_n\}$.

Для каждого $n = N, N+1, \dots$ рассмотрим N последних наблюдений $Y(i), X(i), i = n - N + 1, \dots, n$.

Метод обнаружения момента разладки m строится следующим образом. Рассматриваются матрицы размерностью $K \times K$: $\mathcal{T}^n(1,l) = \sum_{i=1}^{l} X(i+n-N) X'(i+n-N)$ и матрицы размера $K \times M$: $z^n(1,l) = \sum_{i=1}^{l} X(i+n-N) Y'(i+n-N)$, $l = 1, 2, \dots, N$.

Решающая статистика имеет вид:

$$Y_N^n(l) = \frac{1}{N}\bigl(z^n(1,l) - \mathcal{T}^n(1,l)(\mathcal{T}^n(1,N))^{-1} z^n(1,N)\bigr).$$

Зафиксируем число $0 < \beta < 1/2$. Для обнаружения момента разладки m рассмотрим момент остановки $\tau_N = \{\inf\{n : \max_{[\beta N] \leqslant l \leqslant N} \|Y_N^n(l)\| > C\}\}$, где C — порог, $\|A\|$ — евклидова норма матрицы A.

Теорема. *Пусть выполнены предположения* 1)–4). *Для каждого* $C > 0$ *справедлива следующая экспоненциальная оценка для вероятности ошибки* 1-*го рода* («*ложная тревога*»)

$$\alpha_N \leqslant \varphi_0(C_1) \begin{cases} \exp\Bigl\{-\frac{N C_1 \beta}{4 \varphi_0(C_1)}\Bigr\}, & C_1 > hT \\ \exp\Bigl\{-\frac{N C_1^2 \beta}{4 h \varphi_0(C_1)}\Bigr\}, & C \leqslant hT, \end{cases} \tag{7}$$

где константы h, T *и* $\varphi_0(C_1) \geqslant 1$ *взяты из условия Крамера и* ψ-*перемешивания*, $C_1 = C/(1+K)$.

Пусть $\operatorname{rank} D = M,$ *где* $D = (E - I^{-1}A(\theta))(\mathbf{a} - \mathbf{b})'.$ *Обозначим* $d_1 = (g(\theta^*) - C)/(1+K).$ *Для вероятности ошибки 2-го рода выполнена следующая оценка*:

$$\beta_N \leqslant \varphi_0(d_1) \begin{cases} \exp\Big\{ -\frac{N d_1 \beta}{4\varphi_0(d_1)} \Big\}, & d_1 > hT \\ \exp\Big\{ -\frac{N d_1^2}{4h\varphi_0(d_1)} \Big\}, & d_1 \leqslant hT, \end{cases} \tag{8}$$