

Е. Н. О г о р о д н и к о в (Самара, СамГТУ). **Нелокальные краевые задачи для одного модельного вырождающегося уравнения с дробной производной.**

Последние годы характеризуются повышенным интересом специалистов по краевым задачам для дифференциальных уравнений смешанного типа к постановкам корректных задач в смешанных областях на плоскости для уравнений, имеющих вид:

$$0 = \begin{cases} L_1 u, & \text{если } y > 0, \\ L_2 u, & \text{если } y < 0, \end{cases}$$

где L_1 и L_2 — некоторые дифференциальные операторы, соответственно, параболического и гиперболического типов, а $u = u(x, y)$ — искомая функция. Сравнительно недавно в печати стали появляться работы, в которых уравнение $L_1 u = 0$ содержит оператор дробного (в смысле Римана–Лиувилля) дифференцирования и представляет собой уравнение дробной диффузии, а $L_2 u = 0$ — как правило, вырождающееся на линии $y = 0$ уравнение гиперболического типа [1]. Примером модельного уравнения смешанного типа, образованного одним дифференциальным оператором, параболическим в верхней и гиперболическим в нижней полуплоскости является следующее уравнение:

$$|y|^\sigma u_{xx} - D_{0|y|\eta}^\alpha u = 0, \quad (1)$$

где $\alpha \in (0, 1)$ при $y > 0$ и $\alpha = 2$ при $y \leq 0$; $\sigma > \alpha > 0$;

$$I_{ay;\eta}^\alpha u \equiv D_{ay;\eta}^{-\alpha} u = \begin{cases} \frac{(y-a)^{-(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^y \frac{(t-a)^\eta}{(y-t)^{1-\alpha}} u(x, t) dt, & \alpha > 0, \quad y > a; \\ (y-\alpha)^{-(\alpha+\eta)} D_{ay}^n (y-\alpha)^{n+\alpha+\eta} D_{ay}^{-(n+\alpha)} u, & \alpha \leq 0, \quad n = [-\alpha] + 1, \end{cases}$$

есть левосторонний частный интегро-дифференциальный оператор типа Кобера–Эрдеи порядка α по переменной y , $D_{ay}^n = (\partial/\partial y)^n$.

Для уравнения (1) в области $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$, где $\Omega^+ = \{(x, y): 0 < x < 1, y > 0\}$, а $\Omega^- = \{(x, y): 0 < x - (2/(m+2))(-y)^{(m+2)/2} < x + (2/(m+2))(-y)^{(m+2)/2} < 1, 0 < x < 1\}$ в [2] рассматривались задачи с нелокальным краевым условием

$$AU[\Theta_0(x)] + BU[\Theta_1(x)] = H \lim_{y \rightarrow -0} U(x, y) + K \lim_{y \rightarrow -0} U_y(x, y) + c(x), \quad (2)$$

условиями сопряжения

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\alpha} U(x, y) &= \lim_{y \rightarrow -0} U(x, y), & x \in [0, 1]; \\ \lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\alpha} (y^{1-\alpha} U(x, y))_y &= \lim_{y \rightarrow -0} U_y(x, y), & x \in (0, 1) \end{aligned} \quad (3)$$

и некоторыми граничными условиями

$$U(0, y) = \varphi_0(y), \quad u(1, y) = \varphi_1(y), \quad (4)$$

где $\Theta_0(x) = x/2 - i((m+2)x/4)^{2/(m+2)}$, $\Theta_1(x) = (1+x)/2 - i((m+2)(1-x)/4)^{2/(m+2)}$; A, B, H, K — определенные интегро-дифференциальные операторы или функции переменной x ; $c(x), \varphi_0(y), \varphi_1(y)$ — известные функции.

В работе, представленной данным сообщением, аналогичные задачи рассмотрены для случая $\alpha \in (1, 2)$ при $y > 0$ и $\alpha = 2$ при $y \leq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Килбас А. А., Репин О. А. Аналог задачи Бицадзе–Самарского для уравнения смешанного типа с дробной производной. — Дифференц. уравнения, 2003, т. 39, № 5, с. 638–644.
2. Огородников Е. Н. Нелокальные краевые задачи для одного модельного парабола-гиперболического уравнения с дробной производной. — В сб.: Труды четвертой Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование некраевые задачи». Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. Самара: СамГТУ, 2007, с. 147–151.