В. В. Горгорова (Ростов-на-Дону, РГСУ). **К вопросу о свойствах универсальной хааровской единственности для векторнозначных случайных процессов на конечном вероятностном пространстве.**

Пусть $(\Omega^{(i)}, \mathcal{F}_k^{(i)}, \mathcal{F}^{(i)})_{k=0}^N$ — фильтрующиеся пространства ($i = 1, 2$), где число N конечно, $\mathcal{F}_0^{(i)} = \{\Omega^{(i)}, \varnothing\}$, а $\mathcal{F}_N^{(i)} = \mathcal{F}^{(i)}$ — конечные σ-алгебры. Обозначим $F^{(i)}$ фильтрацию $(\mathcal{F}_k^{(i)})_{k=0}^N$. Рассмотрим $\Omega = \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$, $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k^{(1)} \otimes \mathcal{F}_k^{(2)}$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(1)} \otimes \mathcal{F}^{(2)}$ и положим $F = (\mathcal{F}_k^{(i)} \otimes \mathcal{F}_k^{(2)})_{k=0}^N$.

Обозначим $\mathcal{P}^{(i)}$ множество вероятностных мер на $(\Omega^{(i)}, \mathcal{F}^{(i)})$, каждая из которых нагружает все атомы из $\mathcal{F}^{(i)}$. Пусть $Z^{(i)} = (Z_k^{(i)}, \mathcal{F}_k^{(i)})_{k=0}^N$ есть адаптированный векторнозначный случайный процесс (в. с. п.) на $(\Omega^{(i)}, \mathcal{F}^{(i)})$. Этот процесс можно трактовать как процесс дисконтированных цен акций некоторого (B, S)-рынка, определенного на $(\Omega^{(i)}, \mathcal{F}^{(i)})$. Обозначим $P^{(i)} \in \mathcal{P}^{(i)}(Z^{(i)}, F^{(i)})$ есть множество мер, относительно которых процесс $Z^{(i)} = (Z_k^{(i)}, \mathcal{F}_k^{(i)})_{k=0}^N$ удовлетворяет СУХЕ (в работе [1] содержатся определения хааровской интерполирующей фильтрации (х. и. ф.) $H = (\mathcal{H}_n)_{n=0}^L$ фильтрации F, мартингальной интерполяции $Y = (Y_n, \mathcal{H}_n, P)_{n=0}^L$ процесса Z, свойства универсальной хааровской единственности (СУХЕ) мартингальных мер).

Рассмотрим описанную схему в случае $N = 1$. Пусть $\Omega^{(1)} = \{A_1, A_2, A_3\}$, и $\Omega^{(2)} = \{B_2, B_2\}$. Пусть $Z_0^{(1)} = a$ и $Z_0^{(2)} = b$ — значения дисконтированной цены акций в начальный момент времени, $Z_1^{(1)}, Z_1^{(2)}$ — вектора дисконтированных цен акций в финальный момент. Положим $a_j = Z_1^{(1)}(A_j)$, $j = 1, 2, 3$; $b_l = Z_1^{(2)}(B_l)$, $l = 1, 2$.

Предположим, что $Z_k^{(1)}, Z_k^{(2)}$ независимые случайные величины и что $\mathcal{P}^{(i)}(Z^{(i)}, F^{(i)}) \neq \varnothing$. Зафиксируем меры $P^{(1)} = (p_1, p_2, p_3)$ и $P^{(2)} = (q_1, q_2)$, где $P^{(i)} \in \mathcal{P}^{(i)}(Z^{(i)}, F^{(i)})$, $p_j = P^{(1)}(A_j), q_l = P^{(2)}(B_l)$.

На пространстве $\Omega = \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ можно рассмотреть множество специальных хааровских интерполяций $H = (\mathcal{H}_n)_{n=0}^5$ фильтрации F. Рассмотрим, например, интерполяцию следующего вида: $\mathcal{H}_0 = \{\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}, \varnothing\}$; $\mathcal{H}_1 = \sigma\{A_1 \times B_1\}$; $\mathcal{H}_2 = \sigma\{A_1 \times B_1, A_1 \times B_2\}$; $\mathcal{H}_3 = \sigma\{A_1 \times B_1, A_1 \times B_2, A_2 \times B_1\}$; $\mathcal{H}_4 = \sigma\{A_1 \times B_1, A_1 \times B_2, A_2 \times B_1, A_2 \times B_2\}$; $\mathcal{H}_5 = \sigma\{A_1 \times B_1, A_1 \times B_2, A_2 \times B_1, A_2 \times B_2, A_3 \times B_1\}$.

Этой интерполяции соответствует процесс

$$\widetilde{Z} = \begin{pmatrix} Z_0^{(1)}, Z_0^{(2)}, \mathcal{F}_0^{(1)} \otimes \mathcal{F}_0^{(2)} \\ \mathbf{M}^{P^{(1)} \otimes\ P^{(2)}}[Z_1^{(1)} | \mathcal{H}_1], \mathbf{M}^{P^{(1)} \otimes\ P^{(2)}}[Z_1^{(2)} | \mathcal{H}_1], \mathcal{H}_1 \\ \dots \\ Z_1^{(1)}, Z_1^{(2)}, \mathcal{H}_5 \end{pmatrix}.$$

Множество мартингальных мер $R = (r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}, r_{31}, r_{32})$ процесса $(\widetilde{Z}_n, \mathcal{H}_n)_{n=0}^5$ описывается системой уравнений

$$
\left\{
\begin{array}{l}
r_{11}+r_{12}+r_{21}+r_{22}+r_{31}+r_{32}=1\\
a_1(r_{11}+r_{12})+a_2(r_{21}+r_{22})+a_3(r_{31}+r_{32})=a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3\\
b_1(r_{11}+r_{21}+r_{31})+b_2(r_{21}+r_{22}+r_{32})=b_1q_1+b_2q_2\\
((a_2-a_1)p_2+(a_3-a_1)p_3)r_{12}+((a_1-a_2)p_1q_2+(a_3-a_2)p_3)r_{21}\\
\quad +((a_1-a_2)p_1q_2+(a_3-a_2)p_3)r_{22}+((a_1-a_3)p_1q_2\\
\quad +(a_2-a_3)p_2)r_{31}+((a_1-a_3)p_1q_2+(a_2-a_3)p_2)r_{32}=0\\
((b_1-b_2)(p_2+p_3)q_1)r_{12}+((b_2-b_1)q_2)r_{21}\\
\quad +(b_1-b_2)(p_2+p_3)q_1)r_{22}+((b_2-b_1)q_2)r_{31}\\
\quad +(b_1-b_2)(p_2+p_3)q_1)r_{32}=0\\
(a_3-a_2)p_3)r_{21}+(a_3-a_2)p_3)r_{22}+(a_2-a_3)p_2)r_{31}\\
\quad +(a_2-a_3)p_2)r_{32}=0\\
((b_2-b_1)(p_2+p_3)q_2)r_{21}+((b_1-b_2)(p_2+p_3)q_1)r_{22}\\
\quad +((b_2-b_1)(p_2+p_3)q_2)r_{31}+((b_1-b_2)(p_2+p_3)q_1)r_{32}=0\\
(a_3-a_2)p_3)r_{22}+(a_2-a_3)p_2q_2)r_{31}+(a_2-a_3)p_2q_2)r_{32}=0\\
(b_1-b_2)p_3q_1)r_{22}+((b_2-b_1)(p_2+p_3)q_2)r_{31}+(b_1-b_2)p_3q_1)r_{32}=0\\
(b_2-b_1)p_3q_2)r_{31}+(b_1-b_2)p_3q_1)r_{32}=0
\end{array}
\right. \tag{1}
$$

При численном решении этой системы при заданных исходных значениях мартингальных мер $P^{(1)}=(p_1,p_2,p_3)$ и $P^{(2)}=(q_1,q_2)$, удовлетворяющих СУХЕ, получено единственное решение, которое имеет вид: $r_{11}=p_1q_1$, $r_{12}=p_1q_2$, $r_{21}=p_2q_1$, $r_{22}=p_2q_2$, $r_{31}=p_3q_1$, $r_{32}=p_3q_2$. Это позволяет утверждать, что адаптированный действительный процесс $(\widetilde{Z}_n,\mathcal{H}_n)_{n=0}^5$ допускает единственную мартингальную меру, совпадающую с $P^{(1)}\otimes\ P^{(2)}$.

Такая же ситуация имеет место для других возможных специальных хааровских интерполяций исходного векторнозначного процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Павлов И.В.*, *Горгорова В.В.* Метод интерполяции в исследовании финансовых рынков. — В сб.: Межународная научная конференция «Образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство». Visokie Tatry — Slovakia. М.: Изд-во РУДН, 2004, с. 221–228.