А. Ю. Г о л у б и н (Москва, МИЭМ). **Оптимизация страхования и перестрахования в модели индивидуального риска.**

Рассматривается так называемая *модель индивидуального риска* [1]. Эта модель описывает потоки платежей между страховщиком и однородной группой клиентов, возможные ущербы (риски) которых — независимые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины (с. в.) X_j ($j = 1, \dots, n$) с известным распределением $F_1(x)$. Страховщик выбирает функцию дележа страхования $I: 0 \leq I(x) \leq x$ и функцию дележа перестрахования $A: 0 \leq A(x) \leq x$. С. в. $I(X_j)$ есть возмещаемая j -му клиенту часть ущерба, $A(I(X_j))$ — доля, оплачиваемая страховщиком, и, соответственно, $I(X_j) - A(I(X_j))$ составляет ущерб перестраховщика. Взнос клиента P и взнос страховщика P_{Π} (за перестрахование) определяются по формуле среднего значения [1]: $P = (1 + \alpha) \mathbf{M} I(X_1)$ и $P_{\Pi} = (1 + \alpha_{\Pi}) \mathbf{M} [I(X_1) - A(I(X_1))]$. Здесь α и α_{Π} — заданные коэффициенты нагрузки, причем выполнено стандартное соотношение $0 < \alpha < \alpha_{\Pi}$.

Объектом изучения является задача выбора страховщиком оптимальных дележей страхования I^* и перестрахования A^* , критерием максимизации выступает ожидаемая полезность финального капитала страховщика

$$\max_{I, A} \mathbf{M} u_0(S). \quad (1)$$

Здесь $S = nP - nP_{\Pi} - \sum_{j=1}^n A(I(X_j))$ есть финальный капитал страховщика, $u_0(x)$ — его функция полезности со стандартными свойствами: $u'_0 > 0$ и $u''_0 < 0$. Обозначим T верхнюю грань $\sup\{\text{supp } F_1\} \leq \infty$ возможных значений риска X_1 .

Теорема. *Оптимальными в смысле (1) служат функции $A^*(x) \equiv x$ и $I^*(x) = x \wedge k^*$, причем уровень k^* определяется следующим образом:*

$$k^* = \begin{cases} T, & \text{если } \psi(T) \leq 0, \\ k^0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где k^0 есть единственное решение на $(0, T)$ уравнения $\psi(k) = 0$,

$$\psi(k) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M} [u'_0(S(k)) | X_1 = k] - (1 + \alpha) \mathbf{M} u'_0(S(k))$$

$$\text{и } S(k) \stackrel{\text{def}}{=} n(1 + \alpha) \mathbf{M} [X_1 \wedge k] - \sum_{j=1}^n X_j \wedge k.$$

Теорема устанавливает, что наиболее выгодным для страховщика будет отказ от перестрахования, при этом лучшей стратегией страхования будет «stop-loss» дележ $I^*(x) = x \wedge k^*$ (малые ущербы оплачиваются полностью, если же $X_j > k^*$, то возмещается лишь сумма k^*). В этом случае клиенту остается «хвост» распределения его риска, что часто является нежелательным с его точки зрения.

Более адекватная в этом смысле модель должна учитывать дополнительные ограничения на риск, остающийся клиенту, например, ограничение сверху на среднее значение риска $\mathbf{M} [X_1 - I(X_1)] \leq C$ или, что то же самое, ограничение снизу на риск страховщика $\mathbf{M} I(X_1) \geq M$, где $M = \mathbf{M} X_1 - C$. Подобная задача для динамической модели страхования, но с иным оптимизируемым критерием, была рассмотрена в [2]. Аналогом же задачи оптимизации (1) в нашем случае будет следующая задача:

$$\max_{I, A} \mathbf{M} u_0(S), \quad \mathbf{M} I(X_1) \geq M.$$

В последней части доклада планируется обсудить особенности структуры решений такой задачи с дополнительным ограничением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bowers N. L., Gerber H. U., Hickman J. C., Jones D. A., Nesbitt C. J.* Actuarial Mathematics. Itaca: The Society of Actuaries, 1986.
2. *Golubin A. Y.* Maximization of Lundberg's coefficient by insurance and reinsurance policies in the risk process. — J. Math. Sci., 2007. (В печати.)