А.Ф.Р о н ж и н, **В.Н.С у р и к о в** (Москва, ИТМиВТ РАН)**. О времени полного перебора.**

Зафиксируем натуральные числа n, m и вещественное число p: $0 < p < 1$.

Пусть последовательность целочисленных случайных величин

$$\overline{m} = m_1, m_2, \ldots \tag{1}$$

образует однородную цепь Маркова с фазовым пространством $(I_m, 2^{I_m})$, где $I_m = \{0, 1, \ldots, m\}$, 2^{I_m} — множество всех подмножеств множества I_m, порожденную вектором начальных распределений $\mathbf{P}\{m_1 = i\} = \binom{m}{i}(1-p)^i p^{m-i}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, и переходной функцией

$$\mathbf{P}\{m_{k+1} = j \,|\, m_k = i\} = \begin{cases} \binom{i}{j}(1-p)^j p^{i-j} & \text{для} \quad 0 \leqslant j \leqslant i \leqslant m, \\ 0 & \text{для} \quad m \geqslant j > i \geqslant 0, \end{cases}$$

$k = 1, 2, \ldots$ Соответствующие определения см. в [1, с. 532].

Обозначим $S_t = m_1 + \cdots + m_t$ сумму первых t значений последовательности (1). Далее через F_t будем обозначать σ-алгебру, порожденную семейством случайных величин $m_1, \ldots, m_t$, $t = 1, 2, \ldots$

Определим функцию $\tau_n(\overline{m})$, равную минимальному t, для которого $S_t \geqslant n$, если таковое существует, и равную $+\infty$, если такового нет. Функция $\tau_n = \tau_n(\overline{m})$ является марковским моментом (см. [1, с. 459]), так как является моментом первого достижения стохастической последовательностью (S_t, F_t) множества $\{n, n+1, \ldots, +\infty\}$.

Представленную выше вероятностную схему можно проиллюстрировать следующим примером, который получил название *полного перебора*.

Многопроцессорный вычислительный комплекс состоит из m процессоров. Этот комплекс применяется к обработке набора из n одинаковых заданий. Во время обработки одного задания каждый процессор может выйти из строя с вероятностью p. В этом случае необработанное задание становится в очередь на первое место. Задания подаются на многопроцессорный комплекс коплектами, состоящими из того же числа заданий, что и число работоспособных процессоров. В случае выхода из строя всех процессоров комплекс перезагружается.

Можно привести пример другой вероятностной схемы, описывающей поведение многопроцессорного вычислительного комплекса, которая эквивалентна приведенной выше.

Рассмотрим последовательность m независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \ldots, X_m$, каждая из которых имеет геометрическое распределение с параметром p. В нашем примере X_i $(i = 1, \ldots, m)$ — это время бесперебойной работы i-го процессора. Тогда вероятностное распределение последовательности $\{S_t\}$ совпадает с вероятностным распределением последовательности $S'_t = \sum_{i=1}^{m}(X_i\,\mathbf{I}\{X_i < t\} + t\,\mathbf{I}\{X_i \geqslant t\})$, $t = 1, 2, \ldots$

В нашем примере $\mathbf{P}\{\tau_n \leqslant n\}$ — вероятность отсутствия перезагрузки комплекса до выполнения всех заданий, $(m - m_{\tau_n})$ — число вышедших из строя процессоров к моменту выполнения всех заданий и $\mathbf{M}\,\tau_n$ — среднее «время» решения задачи полного перебора в случае ее завершения без перезагрузки.

Основные результаты сформулированы в следующей теореме.

Теорема. *Для заданных выше* m, n, p *справедливы следующие соотношения*:

$$\mathbf{P}\{\tau_n \leqslant n\} = (1-p)^n \sum_{\nu=0}^{m-1} \binom{n+m-1}{\nu} p^{\nu} (1-p)^{m-1-\nu}$$

$$= \mathbf{P}\{m_{\tau_n} > 0\} = (1-p)^n \sum_{\nu=0}^{m-1} \binom{n+\nu-1}{\nu} p^{\nu};$$

$$\mathbf{P}\{m_{\tau_n} = m - i\} = \binom{n+i-1}{i} p^i (1-p)^n, \qquad i = 0, \ldots, m-1;$$

$$\mathbf{M}\{m_{\tau_n} - m, \tau_n \leqslant n\} = \frac{np}{1-p} \sum_{\nu=0}^{m-2} \binom{n+m-1}{\nu} p^\nu (1-p)^{m-1-\nu};$$

$$\Big|\mathbf{M}\,\tau_n\,\mathbf{I}\{\tau_n \leqslant n\} - \frac{n-1}{m}\mathbf{M}\,\alpha(n,p,m,k) - \mathbf{M}\,\beta(n,p,m,k)\Big| \\ \leqslant \mathbf{M}\{|m - m_\tau|\,\mathbf{I}\{\tau_n \leqslant n\} - \mathbf{M}\,\beta(n,p,m,k),$$

где

$$\alpha_i(m) = \frac{m}{i+1} \sum_{\nu=0}^{i} \frac{1}{m-i}, \quad \beta_i(m) = \frac{1}{m}(i+1)\alpha_i(m) = \sum_{\nu=0}^{i} \frac{1}{m-i}, \qquad i = 0, 1, \ldots, m-1,$$

$$\mathbf{M}\,\alpha(n,p,m,k) = \mathbf{M}\,\alpha_{\tau_n}(m), \quad \mathbf{M}\,\beta(n,p,m,k) = \mathbf{M}\,\beta_{\tau_n}(m).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980, 575 с.