В. К. Доманский, **В. Л. Крепс** (Санкт-Петербург, СПбЭМИ РАН). **Многошаговые торги «рисковыми» ценными бумагами: случай счетного числа возможных значений ликвидационных цен.**

Винеровский случайный процесс и его дискретный аналог — случайное блуждание — используются для описания эволюции цен на финансовых рынках. Случайные колебания цен традиционно объяснялись воздействием на процесс ценообразования многочисленных экзогенных факторов, подверженных случайным изменениям во времени.

Иная стратегическая мотивировка этого явления предлагается в работе Де Мейера и Салей [1]. Авторы [1] полагают что появление броуновской компоненты в эволюции цен на финансовых рынках вызвано различной информированностью участников рынка о событиях, влияющих на цены. «Инсайдер» не заинтересован в немедленном обнаружении своей приватной информации. Это стремление «инсайдера» скрывать свою информацию понуждает его рандомизировать свои действия, что приводит к появлению броуновской компоненты в эволюции цен.

В работе [1] Де Мейер и Салей демонстрируют эту идею с помощью упрощенной модели многошаговых торгов между двумя агентами за «рисковые» ценные бумаги (акции). Перед началом торгов случайный ход выбирает ликвидационную цену акции на весь период торгов. Ликвидационная цена сообщается игроку 1 и не сообщается игроку 2. Оба игрока знают вероятности исходов случайного хода. Игрок 2 знает, что игрок 1 является инсайдером.

На каждом последовательном шаге торгов $t = 1, 2, \ldots, n$, игроки одновременно делают ставки — предлагают свои цены за одну акцию. Назвавший более высокую цену покупает за эту цену одну акцию у противника. Если ставки равны, то ничего не происходит. Оба игрока стремятся максимизировать цену своего итогового портфеля (деньги плюс ликвидационная цена полученных акций).

В [1] ликвидационная цена акции может принимать лишь два значения: высокое с вероятностью p и низкое с вероятностью $1 - p$. Игроки могут делать произвольные ставки. Представляется более реалистичным считать, что игроки могут назначать только дискретные ставки, пропорциональные минимальной денежной единице. В работе, представленной данным сообщением, мы рассматриваем модель, в которой допустимы любые целочисленные ставки. Случайная ликвидационная цена акции может принимать прозвольные неотрицательные целочисленные значения согласно заданному вероятностному распределению $\overline{p}$.

Такая n-шаговая модель описывается антагонистической повторяющейся игрой $G_n(\overline{p})$ с неполной информацией у второго игрока. В таких играх игроки разыгрывают матричную игру n раз. Матрица выигрышей выбирается случайным ходом из счетного множества бесконечных матриц в соответствии с заданным распределением $(\overline{p})$. Первый игрок знает истинную матрицу выигрышей, а второй игрок знает лишь априорное распределение $(\overline{p})$. После каждого шага оба игрока узнают ход противника. В конце игры игрок 2 платит игроку 1 сумму выигрышей за весь период игры.

Рассмотренные нами ранее в работах [2] и [3] игры $G_n^m(p)$ с двумя возможными значениями 0 и 1 цены акции и с допустимыми ставками k/m, $k = 0, \ldots, m-1$, сводятся к описанным играм с распределением $\overline{p}$, имеющим две ненулевые компоненты $p_0 = 1-p$, $p_m = p$, при делении выигрышей на m и при отбрасывании доминируемых стратегий.

В настоящей работе мы получаем следующие результаты.

Теорема 1. *Если случайная величина $C_{\overline{p}}$, задающая ликвидационную цену акции, имеет конечное математическое ожидание $\mathbf{E}\,[C_{\overline{p}}]$, то значения $V_n(\overline{p})$ n-шаговой игры $G_n(\overline{p})$ существуют.*

Если случайная величина $C_{\overline{p}}$ не принадлежит L^2, то при n, стремящемся к ∞, последовательность $V_n(\overline{p})$ расходится.

Далее мы рассматриваем случай $C_{\overline{p}} \in L^2$, или $M_2[C_{\overline{p}}] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k < \infty$; мы обозначаем $P = \{\overline{p}\colon\ M_2[C_{\overline{p}}] < \infty\}$.

Теорема 2. *При любом $\overline{p} \in P$ при n, стремящемся к ∞, последовательность значений $V_n(\overline{p})$ n-шаговых игр $G_n(\overline{p})$ сходится к кусочно-линейной непрерывной вогнутой функции $H(\overline{p}) = \lim_{n\to\infty} V_n(\overline{p})$. Ее области линейности*

$$L(k) = \{\overline{p}:\ \mathbf{E}\,[C_{\overline{p}}] \in [k, k+1]\}, \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

Ее области недифференцируемости $\Theta(k) = \{\overline{p}\colon\ \mathbf{E}\,[C_{\overline{p}}] = k\}$. Для $\overline{p} \in \Theta(k)$ верны равенства $H(\overline{p}) = (1/2)D\,[C_{\overline{p}}]$, где $\mathbf{D}\,[C_{\overline{p}}]$ — дисперсия $C_{\overline{p}}$.

Ограниченность значений $V_n(\overline{p})$ позволяет корректно определить игры $G_\infty(\overline{p})$ с бесконечным числом шагов, описывающие торги неограниченной продолжительности. Ниже мы получаем решения для игр $G_\infty(\overline{p})$, используя полученные ранее решения игр $G_\infty^m(p)$ (см. [2], [3]) с двумя возможными значениями ликвидационных цен акций и с дискретными допустимыми ставками.

Теорема 3. *Значение $V_\infty(\overline{p})$ игры $G_\infty(\overline{p})$ существует и равно $H(\overline{p})$.*

При $\overline{p} \in L(r)$ первый оптимальный ход j_1 игрока 2 — действие r. Его оптимальный ход j_t $(t = 2, 3, \ldots)$ зависит только от последнего наблюдаемого действия i_{t-1} игрока 1 и его собственного предыдущего действия j_{t-1}:

$$j_t = \begin{cases} j_{t-1} - 1, & \text{при} \quad i_{t-1} < j_{t-1}, \\ j_{t-1}, & \text{при} \quad i_{t-1} = j_{t-1}, \\ j_{t-1} + 1, & \text{при} \quad i_{t-1} > j_{t-1}. \end{cases}$$

При $\overline{p} \in \Theta(r)$ первый оптимальный ход игрока 1 смешивает два действия $r-1$ и r с равными полными вероятностями $1/2$. Действие r имеет апостериорные вероятности $\overline{p}^r$, где

$$p_i^r = \begin{cases} p_i(1 - \sum_{k=1}^{\infty} p_{r+k} / \sum_{k=1}^{\infty} k p_{r+k}), & \text{при} \quad i < r, \\ p_r, & \text{при} \quad i = r, \\ p_i(1 + \sum_{k=1}^{r} p_{r-k} / \sum_{k=1}^{r} k p_{r-k}), & \text{при} \quad i > r. \end{cases}$$

Действие $r-1$ имеет апостериорные вероятности $\overline{p}^{r-1}$, где

$$p_i^r = \begin{cases} p_i(1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{r+k} / \sum_{k=1}^{\infty} k p_{r+k}), & \text{при} \quad i < r, \\ p_r, & \text{при} \quad i = r, \\ p_i(1 - \sum_{k=1}^{r} p_{r-k} / \sum_{k=1}^{r} k p_{r-k}), & \text{при} \quad i > r. \end{cases}$$

Из (1) и (2) следует, что если $p_r = 0$, то $\overline{p}^r \in \Theta(r+1)$ и $\overline{p}^{r-1} \in \Theta(r-1)$. Таким образом, в этом случае оптимальная стратегия Игрока 1 порождает симметричное случайное блуждание случайной последовательности апостериорных вероятностей по областям $\Theta(k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Вероятностные распределения с носителем, состоящим из двух соседних точек, образуют области поглощения.

Исследование проводилось при поддержке РФФИ, проект № 07–06–00174.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *De Meyer B.*, *Moussa Saley H.* On the Strategic Origin of Brownian Motion in Finance. — Internat. J. Game Theory, 2002, v. 31, p. 285–319.
2. *Доманский В. К.*, *Крепс В. Л.* Повторяющиеся игры с асимметричной информацией и случайные блуждания цен на финансовых рынках. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2005, т. 12, в. 4, с. 950–952.
3. *Доманский В.К.*, *Крепс В.Л.* Момент обнаружения «инсайдерской» информации на торгах с асимметричной информированностью агентов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 3, с. 399–416.