

А. Г. М а л ы ш к и н (Москва, МГУ). **Модель синхронизации времени на разных временных шкалах.**

Процесс параллельного вычисления состоит в следующем: N процессоров об- считывают некоторую общую задачу, при этом каждый процессор выполняет свою часть задания, но время от времени он вынужден обмениваться информацией с дру- гими процессорами. На языке частиц может быть предложено множество различных вероятностных моделей, соответствующих этому процессу (см., например, [1]–[3]). Свободное движение частиц соответствует вычислениям, проводимым каждым про- цессором независимо от других процессоров, а взаимодействие частиц соответствует синхронизации в работе процессоров. На практике одним из способов синхронизации является так называемая процедура *отката* (rollback) (см. [4, гл. 8]). В работах [1], [2] процедура отката в терминах частиц реализуется парным взаимодействием, при котором частица с большей координатой откатывается к частице с меньшей ко- ординатой. Взаимодействие, рассматриваемое в этой работе, было введено в [5] и изучалось также в [6].

Модель состоит в следующем. На прямой $\mathbf{R}$ «живут» N частиц. Частицы могут мгновенно перемещаться в дискретные моменты времени $t \in \mathbf{Z}_+$ по следующему правилу: для некоторого числа α , $0 < \alpha < 1$, с вероятностью $(1 - \alpha)$ каждая частица независимо от других делает скачок согласно распределению некоторой случайной величины η с конечной дисперсией, а с вероятностью α происходит взаимодействие: случайно выбирается тройка частиц, и в этой тройке все три частицы перемещаются на место средней частицы. Таким образом, вектор координат частиц образует цепь Маркова с пространством состояний $\mathbf{R}^N$.

Изучается поведение данной системы частиц при стремлении $N \rightarrow \infty$ на раз- личных временных шкалах $t = t(N) \rightarrow \infty$. Результаты, схожие с полученными в работе, представленной данным сообщением, но для других видов взаимодействия и свободной динамики, были получены в [2].

Обозначим $x_k(t)$ положение k -й частицы в момент времени t и введем стандарт- ные обозначения $\bar{x}(t) = N^{-1} \sum_{k=1}^N x_k(t)$ и $S^2(t) = N^{-1} \sum_{k=1}^N (x_k(t) - \bar{x}(t))^2$ для цен- тра масс и эмпирической дисперсии частиц в момент времени t . Если взаимодействие частиц отсутствует ($\alpha = 0$), то $\mathbf{E} S^2(t) = t \mathbf{D} \eta + S^2(0)$, т. е. в среднем эмпирическая дисперсия растет линейно по времени (независимо от N). Взаимодействие же не дает дисперсии расти бесконечно, а именно, справедлив следующий результат.

Теорема. Пусть в начальный момент времени все частицы находились в ко- нечном интервале. Тогда в зависимости от временной шкалы $t = t(N)$ верна следующая асимптотика для средние квадратичного разброса частиц:

- 1) на малых временах, то есть в пределе $t(N)/N \rightarrow 0$: $\mathbf{E} S^2(t) \sim (1 - \alpha) t(N) \mathbf{D} \eta$;
- 2) на временах порядка N : $\mathbf{E} S^2(t) = O(N) = O(t)$;
- 3) при $t(N)/N \rightarrow \infty$, $t(N)/N^2 \rightarrow 0$: $O(N) \leq \mathbf{E} S^2(t) \leq O(t)$;
- 4) при $t(N)/N^2 \rightarrow s > 0$ или $t(N)/N^2 \rightarrow \infty$: $O(N) \leq \mathbf{E} S^2(t) \leq O(N^2)$.

Доказательство этой теоремы опирается на оценку среднего приращения диспе- рсии за один шаг. Оказывается, что при взаимодействии для почти всех конфи- гураций частиц в момент времени t дисперсия в среднем уменьшается на величину порядка $O(S^2(t)/N)$. Однако, существует семейство конфигураций, для которых при взаимодействии дисперсия уменьшается лишь на порядок $O(S^2(t)/N^2)$. Это семей- ство образует «окрестность» базовой конфигурации (названной в работе configura- цией «двух холмов»), при которой $N/2$ частиц сосредоточены в одной точке и $N/2$ — в другой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 06–01–00662.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Manita A., Shcherbakov V.* Asymptotic Analysis of a Particle System with Mean-Field Interaction. — Markov Processes Related Fields, 2005, v. 11, № 3, p. 489–518.
2. *Малышев В. А., Манита А. Д.* Фазовые переходы в модели синхронизации времени. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, № 1, с. 150–158.
3. *Greenberg A., Malyshev V. A., Popov S. Yu.* Stochastic Model of Massively Parallel Computation. — Markov Processes Related Fields, 1995, v. 1, № 4, p. 473–490.
4. *Bertsekas D. P., Tsitsiklis J. N.* Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods. N. Y.: Prentice–Hall, 1989.
5. *Малышкин А. Г.* Пределная динамика для вероятностных моделей обмена информацией в сетях параллельных вычислений. — Проблемы передачи информации, 2006, т. 42, № 3, с. 78–96.
6. *Малышкин А. Г.* Стохастическая многочастичная синхронизация на малых временах. — В сб.: Труды XXVIII конференции молодых ученых. М.: изд-во МГУ, 2006, с. 114–118.