

А. С. К а л и т в и н, В. А. К а л и т в и н (Липецк, ЛГПУ). **О численном решении уравнения Романовского.**

К интегральному уравнению

$$x(t, s) = \int_a^b m(t, s, \sigma)x(\sigma, t) d\sigma + f(t, s) \equiv (Mx)(t, s) + f(t, s) \quad (1)$$

приводится задача теории марковских цепей [1]. Уравнение (1) получено В. И. Романовским в 1932 г. и исследовано им в пространстве непрерывных функций методом, аналогичным методу определителей Фредгольма. В [1] предполагалась непрерывность заданных функций $m(t, s, \sigma)$ и $f(t, s)$. При более общих условиях уравнение (1) и другие уравнения подобного типа изучались в [2]. Характерная особенность уравнения (1) связана с перестановкой переменных у неизвестной функции под знаком интеграла и интегрированием по одной из переменных.

Пусть $D = [a, b] \times [a, b]$, C — пространство непрерывных на D функций, L^1 — пространство суммируемых на $[a, b]$ функций, $C(L^1)$ — пространство непрерывных на D вектор-функций со значениями в L^1 и ядро $m \in C(L^1)$.

Тогда оператор M действует и непрерывен в пространстве C . При этом M не является компактным оператором в C , однако M^2 — компактный оператор в C . Следовательно, для интегрального уравнения (1) с ядром $m \in C(L^1)$ имеют место теоремы Фредгольма [2]. Найти же точное решение уравнения (1) в общем случае не представляется возможным. Поэтому важное значение имеют приближенные и численные методы решения уравнения (1). Существенную роль при этом играет доказываемое с применением теоремы об отображении спектров утверждение.

Теорема. Пусть $m \in C(L^1)$ и f — произвольная функция из C . Тогда справедливы утверждения:

а) если 1 не принадлежит спектру оператора

$$(M^2x)(t, s) = \iint_D m(t, s, \sigma)m(\sigma, t, \sigma_1)x(\sigma_1, \sigma) d\sigma_1 d\sigma,$$

то уравнение (1) и интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$x(t, s) = (M^2x)(t, s) + (Mf)(t, s) + f(t, s) \quad (2)$$

обратимы и эквивалентны в C ;

б) если 1 принадлежит спектру оператора M^2 , -1 не принадлежит спектру оператора M , то в C уравнения (1) и (2) эквивалентны.

В условии теоремы приближенное и численное решения уравнения (1) заменяется такой же проблемой для интегрального уравнения Фредгольма второго рода (2). Для приближенного и численного решения уравнения (2) могут быть использованы хорошо развитые методы решения двумерных интегральных уравнений Фредгольма второго рода: метод замены интегрального уравнения алгебраической системой линейных уравнений с помощью применения кубатурной формулы, аппроксимация ядра вырожденными ядрами (метод моментов, метод Бэтмена и т. д.), итерационные и проекционные методы, методы минимизации невязки, вариационные и другие методы. При численном решении уравнения (2) с применением этих методов могут быть использованы различные системы компьютерной математики, такие, как Mathcad, Matlab, Scilab и другие.

Непосредственное же применение перечисленных методов к уравнению (1) может вызвать определенные трудности ввиду недостаточной разработанности методики их применения к уравнениям данного типа. Например, с использованием формулы прямоугольников для приближенного вычисления интеграла, уравнение (1) приводится

к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$x_{kl} = h \sum_{j=1}^n m_{klj} x_{jk} + f_{kl}, \quad k, l = 1, \dots, n,$$

где $x_{kl} = x(t_k, s_l)$, $f_{kl} = f(t_k, s_l)$, $m_{klj} = m(t_k, s_l, \sigma_j)$, $h = (b - a)/n$, $t_k = s_k = \sigma_k = a + kh$. Если решать эту систему, то приходится учитывать, что матрица из неизвестных в ее правой части получается транспонированием матрицы левой части. Данное обстоятельство существенно усложняет построение алгоритмов численного решения этой системы. К сожалению, распространенные системы компьютерной математики не содержат программ для решения систем такого вида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Романовский В. И.* Избранные труды. Т. 2. Теория вероятностей, статистика и анализ. Ташкент: Наука, 1964, 390 с.
2. *Калитвин А. С.* Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2007, 195 с.