

А. Л. Штраус, А. А. Волков (Ульяновск, УлГУ). **Задача управления наблюдаемостью временно ненаблюдаемых систем.**

В работе, представленной данным сообщением, рассмотрена модель процесса с временно наблюдаемыми траекториями и построены ее оценки в произвольный момент времени. В предполагаемой схеме объект наблюдения (например, биологические процессы в организме) недоступен точному измерению либо по физическим причинам, либо вследствие чрезмерно большой стоимости проведения наблюдения. В этих ситуациях он должен быть определен на основании результатов измерений некоторого внешнего показателя, опосредованно зависящего от наблюдаемого. При этом учитываются возмущения, действующие на внешний показатель, которые интерпретируются как случайные процессы с заданными статистическими характеристиками. Рассмотрена задача оптимизации интенсивности частоты наблюдений при условии, что имеется «плата» как за время наблюдений, так и их число. В функционал потерь также аддитивно входит совокупная плата за ошибку оценивания ненаблюдаемого процесса. Моменты разладки наблюдаемости и моменты восстановления наблюдаемости трактуются как моменты скачков точечного процесса.

Процесс X_t предполагается ненаблюдаемым, процесс Y_t — наблюдаемым. Фактически процесс Y_t реализован как чередование промежутков времени, на которых он либо полностью совпадает с процессом X_t , либо полностью ненаблюдаем. Эти промежутки времени определяются значениями моментов скачков пуассоновского процесса $N = (N_t)_{t \geq 0}$, компенсатор $\tilde{N}_t$ которого задается интегралом от неотрицательной периодической функции: $d\tilde{N}_t/dt = \lambda(1 + \sin(2\pi t/T))$, т. е. $\tilde{N}_t = \int_0^t \lambda(1 + \sin(2\pi s/T)) ds$, где $\lambda > 0$. Также задан процесс телеграфного типа, порождаемый процессом N_t :

$$K_t = - \int_0^t K_{s-} dN_s + \int_0^t (1 - K_{s-}) dN_s \quad \text{или} \quad K_t = \int_0^t (1 - 2K_{s-}) dN_s.$$

Тогда процесс K_t равен 0 в случае ненаблюдаемости процесса X_t и K_t равен 1 в случае полного наблюдения процесса X_t : $X_t = \alpha t + W_t$, $Y_t = X_t K_t$.

Случайные моменты остановки $\tau_i = \inf\{t: t > 0, N_t = i\}$, где $i = 0, 1, \dots$, определяют скачки K_t :

$$K_t = \begin{cases} 1, & t \in \cup_{i \in [0; +\infty)} [\tau_{2i+1}, \tau_{2i+2}), \\ 0, & t \in \cup_{i \in [0; +\infty)} [\tau_{2i}, \tau_{2i+1}). \end{cases}$$

Рассмотрим задачу оптимального управления интенсивностью наблюдений с функционалом потерь за время $(0, t]$:

$$\Phi(t) = E \left\{ \int_0^t \gamma_s ds + \alpha \int_0^t K_s ds \right\},$$

где первая часть функционала — интегральная «плата» за ошибку оценивания, вторая часть — интегральная «плата» за наблюдения.

Утверждение. *Функционал потерь равен*

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \sigma^2 \int_0^t e^{-\lambda s + (\lambda T/(2\pi)) \cos(2\pi s/T)} \left(-e^{2s} + \frac{1}{2} \int_0^s e^{\lambda x - (\lambda T/(2\pi)) \cos(2\pi x/T)} dx \right) ds \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \left(e^{-2\lambda s + (\lambda T/\pi) \cos(2\pi s/T)} + 1 \right) ds. \end{aligned}$$

Доказательство проводится следующим образом: вводится вспомогательный процесс r_t с нулевым начальным значением и с $dr_t = (1 - K_t)dt - r_{t-}dN_t$, $\bar{r}_t = Er_t$. Тогда $E \int_0^t \gamma_s ds = E \int_0^t \sigma^2 r_s ds = \sigma^2 \int_0^t \bar{r}_s ds$. Последовательно находятся выражения

для процессов $\overline{K}_t = EK_t$ и $\overline{r}_t$, с их помощью вычисляются оба слагаемых в функционале потерь.

Далее рассматривается оптимизационная задача $\Phi(t) \rightarrow \min_{\lambda}$, находится ее численное решение $\lambda = \lambda(t)$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 06-01-00338.