В. А. Т о л п а е в, **В. В. П а л и е в**, **Д. В. Б а с к о** (Ставрополь, СевКавГТУ). **Двумерные математические модели линейной фильтрации жидкости и газа.**

В естественных условиях продуктивные пористые пласты, содержащие воду, нефть или газ (кратко — флюиды) имеют искривленную форму и переменную толщину. Поскольку подошва и кровля продуктивных пластов чаще всего непроницаемы, то и движения флюидов в них с достаточной точностью можно моделировать как двумерные. Для этого за поверхности тока во всем пласте принимаются координатные поверхности $\zeta = \mathrm{const}$ ортогональной расчетной системы координат ξ, η, ζ, выбираемой так, чтобы поверхности подошвы и кровли совпадали с зафиксированными координатными поверхностями $\zeta = \zeta_1 = \mathrm{const}$ и $\zeta = \zeta_2 = \mathrm{const}$. При таком подходе для расчета приведенного давления $P(\xi, \eta, t)$ флюида с плотностью $\rho(P)$ в рассматриваемом пласте с проницаемостью $K = k_0\, k(\xi, \eta, \zeta)$ (где k_0 — постоянный размерный коэффициент, а $k(\xi, \eta, \zeta)$ — положительная непрерывная безразмерная функция), пористостью $m(P)$ и изотермой объемной сорбции $g(P)$ авторами выведено уравнение

$$\frac{k_0}{\mu}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[T_1(\xi,\eta)\,\rho(P)\,\frac{\partial P}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[T_2(\xi,\eta)\,\rho(P)\,\frac{\partial P}{\partial\eta}\right]\right\}$$
$$= T_3(\xi,\eta)\,\frac{\partial}{\partial t}\{[\rho(P)+g(P)]\,m(P)\}, \qquad (1)$$

в котором μ — коэффициент динамической вязкости флюида, а T_1, T_2 и T_3 обозначены переменные коэффициенты, определяемые через параметры Ламе криволинейной системы координат по формулам

$$T_1(\xi,\eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{H_2(\xi,\eta,\zeta)\,H_3(\xi,\eta,\zeta)}{H_1(\xi,\eta,\zeta)}\,k(\xi,\eta,\zeta)\,d\zeta,$$
$$T_2(\xi,\eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{H_1(\xi,\eta,\zeta)\,H_3(\xi,\eta,\zeta)}{H_2(\xi,\eta,\zeta)}\,k(\xi,\eta,\zeta)\,d\zeta,$$
$$T_3(\xi,\eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} H_1(\xi,\eta,\zeta)\,H_2(\xi,\eta,\zeta)\,H_3(\xi,\eta,\zeta)\,d\zeta.$$

Для фильтрации реального газа с уравнением состояния $\rho(P) = (\rho_{\text{ат}}/P_{\text{ат}})\,(z(P_{\text{ат}})/z(P))\,P$ в недеформируемом пласте ($m(P) = \mathrm{const}$), проявляющем сорбционные свойства (например, фильтрация метана в угольных пластах), описываемые изотермой Ленгмюра $g(P) = a\,P/(1+b\,P)$, для функции Лейбензона $\Phi(P) = \int P(z(P))^{-1}\,dP$ из (1) получим следующее уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[T_1(\xi,\eta)\,\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[T_2(\xi,\eta)\,\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right] = \frac{\mu\,m}{k_0}\,T_3(\xi,\eta)$$
$$\times\left\{\frac{\partial[\Phi'(P)]}{\partial t}+\frac{P_{\text{ат}}}{\rho_{\text{ат}}\,z(P_{\text{ат}})}\,\frac{a}{(1+b\,P)^2}\,\frac{1}{\Phi'(P)}\,\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right\}. \qquad (2),$$

Если пласт сорбционных свойств не проявляет ($g(P) = 0$), то уравнение (1) принимает более простой вид:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[T_1(\xi,\eta)\,\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[T_2(\xi,\eta)\,\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right] = \frac{\mu\,m}{k_0}\,T_3(\xi,\eta)\,\frac{\partial[\Phi'(P)]}{\partial t}. \qquad (3)$$

Наиболее простая математическая модель линейной изотермической фильтрации получается для случая фильтрации несжимаемой жидкости в неоднородных искривленных недеформируемых пластах:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[T_1(\xi,\eta)\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[T_2(\xi,\eta)\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right] = 0, \quad \varphi = -\frac{k_0\,P(\xi,\eta,t)}{\mu}. \qquad (4)$$

Математическая модель линейной изотермической фильтрации упругой жидкости в однородном упругом искривленном изотропном пласте, не обладающем сорбционными свойствами, будет описываться уравнением

$$\varkappa\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[T_1(\xi,\eta)\,\frac{\partial P}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[T_2(\xi,\eta)\,\frac{\partial P}{\partial\eta}\right]\right\}=T_3(\xi,\eta)\,\frac{\partial P}{\partial t}, \tag{5}$$

где $\varkappa = k_0/(\mu\,\beta^*)$, а $\beta^* = \beta_{\text{ж}} + \beta_c/m_o$, $\beta_{\text{ж}}$ и β_c — коэффициенты, соответственно, объемного сжатия жидкости и упругости пласта.

Для весьма тонких пластов, у которых толщина в сравнении с размерами простирания мала, зависимостью, во-первых, параметров Ламе H_1, H_2, H_3, во-вторых, проекций скорости фильтрации V_ξ и V_η, в-третьих, коэффициента проницаемости от координаты ζ можно пренебречь и принять $H_1 = H_1(\xi,\eta,\zeta_1) = h_1(\xi,\eta)$, $H_2 = H_2(\xi,\eta,\zeta_1) = h_2(\xi,\eta)$, $H_3 = H_3(\xi,\eta,\zeta_1) = H(\xi,\eta)/(\zeta_2-\zeta_1)$, $k(\xi,\eta,\zeta) = k(\xi,\eta,\zeta_1) = k_n(\xi,\eta)$. Тогда для коэффициентов T_1, T_2 и T_3 получим следующие значения:

$$\begin{aligned}
T_1(\xi,\eta) &= \frac{h_2(\xi,\eta)}{h_1(\xi,\eta)}\,H(\xi,\eta)\,k_n(\xi,\eta),\\
T_2(\xi,\eta) &= \frac{h_1(\xi,\eta)}{h_2(\xi,\eta)}\,H(\xi,\eta)\,k_n(\xi,\eta),\\
T_3(\xi,\eta) &= h_1(\xi,\eta)\,h_2(\xi,\eta)\,H(\xi,\eta)\,k_n(\xi,\eta).
\end{aligned} \tag{6}$$

В последних формулах функция $H(\xi,\eta)$ задается наперед и называется *толщиной слоя*. Все ранее полученные математические модели (2)–(5) остаются справедливыми и для весьма тонких пластов, если в них вместо T_1, T_2 и T_3 подставить указанные в (6) значения.