

В. В. Жуков, В. М. Хаметов (Москва, МИЭМ). **Представление измеримых ограниченных функционалов, заданных на траекториях многомерных случайных последовательностей.**

1. В докладе рассматривается проблема построения представлений для произвольных измеримых ограниченных функционалов, заданных на траекториях многомерных случайных последовательностей с конечным горизонтом. В [1–3] рассматривалась вышеуказанная проблема, в ней установлены условия существования «интегрального» представления. Здесь, опираясь на результаты работы [2], мы приводим новое представление для таких функционалов.

2. Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in N_0}, P)$, где $N_0 \triangleq \{0, \dots, N\}$ и $N < \infty$, задана d -мерная согласованная случайная последовательность $(S_t, \mathcal{F}_t)_{t \in N_0}$, причем $\mathcal{F}_t = \sigma\{S_0, \dots, S_t\}$ для любого $t \in N_0$.

3. Сформулируем основные предположения.

Условие (P). Вероятностная мера P является единственной крайней точкой множества вероятностных мер, относительно которых d -мерная последовательность $(S_t, \mathcal{F}_t)_{t \in N_0}$ является d -мерным мартингалом.

Условие (S). Для любых $t \in N_0$ и $l = 1, 2, \dots, d$:

- i) $\mathbf{M} \sum_{i=1}^d |\Delta S_t^{(i)}| < \infty$, где $S_t^{(i)}$ — i -я компонента вектора S_t , $\Delta S_t^{(i)} = S_t^{(i)} - S_{t-1}^{(i)}$;
- ii) Пусть существует $\mathbf{M}(\prod_{i=1}^l \Delta S_t^{(i)} | \mathcal{F}_{t-1})$ и $\mathbf{M}(\prod_{i=1}^l \Delta S_t^{(i)} | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$.

4. Сформулируем основной результат.

Теорема. Пусть любая f_N есть $\mathcal{F}_N$ -измеримая ограниченная случайная величина. Пусть выполнены условия (P) и (S). Тогда для любого $t \in N_0$ существуют такие $\mathcal{F}_{t-1}$ -измеримые случайные величины $\gamma_t^{i_1}, \gamma_t^{i_1, i_2}, \dots, \gamma_t^{i_1, \dots, i_d}$ (здесь индексы $i_1, \dots, i_d$ таковы, что $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq d$), что P -н. н. справедливо представление

$$f_N = X_0 + \sum_{t=1}^N \left[\sum_{i_1=1}^d \gamma_t^{i_1} \Delta S_t^{i_1} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq d} \gamma_t^{i_1, i_2} \Delta S_t^{i_1} \Delta S_t^{i_2} + \dots + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq d} \Delta S_t^{i_1} \dots \Delta S_t^{i_d} \right]. \quad (1)$$

5. **Пример.** Пусть $d = 2$, $N = 1$ и $S_1^{(i)} = S_0^{(i)}(1 + \tilde{\rho}_1^{(i)})$, $i = 1, 2$, где $S_0^{(i)} \in (0, \infty)$ — детерминированные величины; $\rho_1^{(1)}$ и $\rho_1^{(2)}$ — бернуллиевские случайные величины, принимающие значения a_1, b_1 и a_2, b_2 , соответственно, $\tilde{\rho}_1^{(1)} = c_1 \rho_1^{(1)} + c_2 \rho_1^{(2)}$, c_i — константы, а $\tilde{\rho}_1^{(2)} = \rho_1^{(2)}$, причем:

i) константы c_i, a_i и b_i таковы, что $-1 < c_1 a_1 + c_2 a_2 < 0 < c_1 b_1 + c_2 b_2$, $-1 < a_2 < 0 < b_2$;

ii) вероятности, с которыми бернуллиевские случайные величины $\rho_1^{(i)}$, $i = 1, 2$, принимают значения a_i и b_i , соответственно, равны $\mathbf{P}\{\rho_1^{(i)} = a_i\} = b_i/(b_i - a_i) = q_i^*$ и $\mathbf{P}\{\rho_1^{(i)} = b_i\} = 1 - q_i^* = p_i^*$. Очевидно, что в $\mathbf{M} \rho_1^{(i)} = 0$, $i = 1, 2$.

Пусть $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^1$ — измеримая ограниченная функция. Тогда из утверждения теоремы следует, что $f(S_1^{(1)}, S_2^{(2)})$ допускает представление

$$f(S_1^{(1)}, S_2^{(2)}) = X_0 + \gamma_1^1 \rho_1^{(1)} + \gamma_1^2 \rho_1^{(2)} + \gamma_1^{1,2} \rho_1^{(1)} \rho_1^{(2)}, \quad (2)$$

причем $X_0 = \mathbf{M} f(S_1^{(1)}, S_2^{(2)})$, $\gamma_1^1 = (\varphi^{b_1, b_2} - \varphi^{a_1, b_2} - c q_2^*)/(b_1 - a_1)$, $\gamma_1^2 = (\varphi^{a_1, b_2} - \varphi^{a_1, a_2} - c p_1^*)/(b_2 - a_2)$, $\gamma_1^{1,2} = c/((b_1 - a_1)(b_2 - a_2))$, где

$$\varphi^{b_1, b_2} \triangleq f(S_0^{(1)}(1 + c_1 b_1 + c_2 b_2), S_0^{(2)}(1 + b_2)),$$

$$\begin{aligned}
\varphi^{a_1, b_2} &\triangleq f(S_0^{(1)}(1 + c_1 a_1 + c_2 b_2), S_0^{(2)}(1 + b_2)), \\
\varphi^{b_1, a_2} &\triangleq f(S_0^{(1)}(1 + c_1 b_1 + c_2 a_2), S_0^{(2)}(1 + a_2)), \\
\varphi^{a_1, a_2} &\triangleq f(S_0^{(1)}(1 + c_1 a_1 + c_2 a_2), S_0^{(2)}(1 + a_2)), \\
c &\triangleq \varphi^{b_1, b_2} - \varphi^{a_1, b_2} - \varphi^{b_1, a_2} + \varphi^{a_1, a_2}.
\end{aligned}$$

В частности, пусть $f(S_1^{(1)}, S_1^{(2)}) = \alpha \varphi_1(S_1^{(1)}) + \beta \varphi_2(S_1^{(2)})$. Тогда, если $c_2 = 0$, то из (2) следует известное S -представление для CRR-рынка [1]; если $c_1 \neq 0$ и $S_0^{(i)} > 0$, то из (2) легко вывести представление «в терминах S »:

$$\begin{aligned}
f(S_1^{(1)}, S_1^{(2)}) &= X_0 + \frac{\gamma_1^1}{S_0^{(1)} c_1} \Delta S_1^{(1)} + \frac{(\gamma_1^2 - \gamma_1^1 c_2 / c_1)}{S_0^{(2)}} \Delta S_1^{(2)} \\
&\quad + \gamma_1^{1,2} \frac{\Delta S_1^{(1)}}{S_0^{(1)} c_1} \frac{\Delta S_1^{(2)}}{S_0^{(2)}} - \gamma_1^{1,2} \frac{c_2}{c_1 S_0^{(2)}} (\Delta S_1^{(2)})^2.
\end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Теория. Т. 2. М.: Фазис, 1998.
2. *Бояринцева Н. С., Хаметов В. М.* Новая теорема о представлении мартингалов. — Матем. заметки, 2004, т. 75, в. 1, с. 40–54.
3. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1. М.: Физматлит, 1994.