

Б.М.Г у р е в и ч (Москва, МГУ, ИППИ РАН). **Термодинамический формализм и глобальные свойства реализаций случайных полей на решетке $\mathbf{Z}^d$.**

Термодинамический формализм (ТФ) возник в конце 60-х — начале 70-х годов 20-го века на стыке теории вероятностей и теории динамических систем под идейным влиянием статистической физики. С технической точки зрения, ТФ позволяет описывать широкие классы вероятностных мер с более или менее контролируемыми свойствами, что часто оказывается полезным в приложениях. Для применения ТФ достаточно иметь компактное метрическое пространство (Ω, ρ) и группу (или полугруппу) τ его непрерывных отображений в себя. Пусть $\mathcal{M}$ — совокупность τ -инвариантных борелевских вероятностных мер на Ω . Для всякой функции $\varphi \in C(\Omega, \mathbf{R})$ положим $P_\varphi(\mu) := h_\mu(\tau) + \mu(\varphi)$, $\mu \in \mathcal{M}$, где $\mu(\varphi) := \int \varphi d\mu$ и $h_\mu(\tau)$ — энтропия Колмогорова–Синяя динамической системы (Ω, τ, μ) . Мера $\mu_0 \in \mathcal{M}$ называется φ -равновесной, если на ней достигается точная верхняя грань функционала P_φ . Рассмотрим частный случай, в котором $\Omega = \{\omega : \mathbf{Z}^d \rightarrow S\}$, где S — конечное множество, а τ — группа сдвигов: $\tau = \{\tau_t, t \in \mathbf{Z}^d\}$, $(\tau_t \omega)(t') = \omega(t + t')$, $\omega \in \Omega$, $t, t' \in \mathbf{Z}^d$. Всякую меру $\mu \in \mathcal{M}$ теперь можно рассматривать как непосредственно заданное однородное случайное поле на $\mathbf{Z}^d$ со значениями в S , а множество Ω — как пространство его реализаций. Реализация ω называется μ -типичной, если для всякой функции $\varphi \in C(\Omega, \mathbf{R})$ выборочное среднее $A_{\varphi, n}(\omega) = |T_n|^{-1} \sum_{t \in T_n} \varphi(\tau_t \omega)$, где $T_n = [-n, n]^d$, сходится к теоретическому среднему $\mu(\varphi)$ (т. е. является состоятельной оценкой последнего). Множество G_μ всех μ -типичных реализаций непусто для каждого $\mu \in \mathcal{M}$, даже незргодического (хотя в последнем случае $\mu(G_\mu) = 0$). Используя ТФ, удастся вычислить хаусдорфову размерность $\dim_\rho(G_\mu)$ этого множества, отвечающую метрике ρ достаточно общего вида. Для вектор-функции $f \in C(\Omega, \mathbf{R}^m)$ с помощью ТФ можно описать множество A_f тех $x \in \mathbf{R}^m$, для которых $\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} A_{f, n}(\omega) = x\} \neq \emptyset$, и функцию $x \mapsto \dim_\rho(\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} A_{f, n}(\omega) = x\})$ (мультифрактальный спектр множества эргодических средних). Из этого описания видно, что A_f — компактное выпуклое множество. Комбинация методов ТФ и выпуклого анализа позволяет изучить более тонкие свойства множества A_f , в частности, найти условия, при которых его относительная внутренность совпадает с множеством средних $\mu(f)$ по всем φ -равновесным мерам μ , где $\varphi \in \{c, f\}$, $c \in \mathbf{R}^m$.

Упомянутые результаты получены совместно с А. А. Темпельманом.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 07-01-00203.