З. И. Бежаева, **В. И. Оселедец** (Москва, МИЭМ, МГУ). **Скрытые марковские цепи и мера Эрдёша.**

Скрытой марковской цепью называется функция от марковской цепи с конечным числом состояний $\eta_k = f(\xi_k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Скрытой марковской цепи отвечает распределение вероятностей μ на пространстве ее реализаций. Оно задается начальным распределением, переходной матрицей и функцией на пространстве состояний марковской цепи.

Эрдёш более 60 лет назад поставил следующую задачу: какой может быть функция распределения $F(x)$ случайной величины $\zeta = \zeta_1\rho + \zeta_2\rho^2 + \cdots$, где $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения 0, 1 и $0 < \mathbf{P}\{\zeta_i = 0\} = q < 1$ $(0 < \rho < 1)$.

Решению задачи Эрдёша посвящено большое количество работ. В [1] задача Эрдёша для случая $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$(число, обратное к золотому сечению) была сведена к изучению скрытой марковской цепи, которая порождается марковской цепью с пятью состояниями $1, 2, 3, 4, 5$. Переходная матрица $P = (p_{ij})$, где

$$p_{11} = p_{21} = q, \quad p_{14} = p_{23} = q - q^2, \quad p_{15} = p_{25} = (1 - q)^2, \quad p_{32} = p_{41} = p_{52} = 1,$$

остальные элементы равны нулю. Начальное распределение — стационарное распределение, функция «склейки состояний» f равна нулю для состояний $1, 2, 3$ и равна 1 для состояний $4, 5$. Распределение μ удобно считать распределением бесконечного случайного двоичного слова $\eta_1\eta_2 \ldots \eta_n \ldots = f(\xi_1)f(\xi_2) \ldots f(\xi_n) \ldots$. Его носитель — компакт Фибоначи бесконечных двоичных слов Фибоначи, в которых нет подслов 11. Это множество компактно относительно метрики $d(x, y) = \rho^{n(x,y)}$, где $n(x, y)$ — длина наибольшего общего начала слов x и y. Мера μ называется *инвариантной мерой Эрдёша* на компакте Фибоначи [1].

Следуя подходу [2] к задаче Эрдёша, мы нашли скрытую марковскую цепь, которая является функцией от марковской цепи $\widetilde{\xi}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, с семью состояниями $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Ненулевые элементы переходной матрицы $\widetilde{P}$ этой цепи:

$$\widetilde{p}_{11} = q, \quad \widetilde{p}_{15} = 1-q, \quad \widetilde{p}_{21} = q^2, \quad \widetilde{p}_{23} = 2q-3q^2+q^3, \quad \widetilde{p}_{25} = q-q^2, \quad \widetilde{p}_{27} = 1-3q+q^2-q^3,$$

$$\widetilde{p}_{32} = \frac{1}{2-q}, \quad \widetilde{p}_{36} = \frac{1-q}{2-q}, \quad \widetilde{p}_{43} = 2q - q^2, \quad \widetilde{p}_{47} = (1 - q)^2, \quad \widetilde{p}_{52} = \widetilde{p}_{62} = \widetilde{p}_{74} = 1.$$

Начальное распределение — стационарное распределение, функция «склейки состояний» $\widetilde{f}$ равна нулю для состояний $1, 2, 3, 4$ и равна 1 для состояний $5, 6, 7$.

Скрытая марковская цепь $\widetilde{\eta}_k = \widetilde{f}(\widetilde{\xi}_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, задает распределение $\widetilde{\mu}$ бесконечного случайного двоичного слова $\widetilde{\eta} = \widetilde{\eta}_1\widetilde{\eta}_2 \ldots \widetilde{\eta}_n \ldots = \widetilde{f}(\widetilde{\xi}_1)\widetilde{f}(\widetilde{\xi}_2) \ldots \widetilde{f}(\widetilde{\xi}_n) \ldots$. Его носитель — компакт Фибоначи бесконечных двоичных слов Фибоначи.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Меры μ и $\widetilde{\mu}$ на компакте Фибоначи совпадают.*

Теорема 2. *Мера μ не может быть распределением скрытой марковской цепи, порожденной марковской цепью, число состояний которой меньше* 5.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 07–01–00203.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бежаева З. И.*, *Оселедец В. И.* Меры Эрдёша, софические меры и марковские цепи. — Записки научных семинаров ПОМИ (Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгебраические методы XIII). 2005, т. 327, с. 27–45.
2. *Lalley S. P.* Random series in powers of algebraic integers: Hausdorff dimension of the limit distribution. 1995, preprint.