

А. В. Б у н я к и н (Краснодар, КубГТУ). **Решение системы уравнений одномерного неуставовившегося течения газа вдоль геодезических линий в специальной метрике.**

Рассматривается одномерная система уравнений неуставовившегося движения идеального газа (скорость звука a считается постоянной) после преобразования к инвариантам Римана

$$U = a \ln \frac{\rho}{\rho_0} : \quad \frac{\partial}{\partial t}(V \pm U) + (V \pm a) \frac{\partial}{\partial x}(V \pm U) = 0.$$

Решение этой системы представляется как сумма двух частей:

$$\begin{aligned} V &= v + V_0, \quad V_0 = \frac{1}{2}(P_0(x - at) + Q_0(x + at)), \\ U &= u + U_0, \quad U_0 = \frac{1}{2}(P_0(x - at) - Q_0(x + at)). \end{aligned}$$

Функции V_0, U_0 удовлетворяют граничным и начальным условиям, тогда соответствующие условия для функций v, u нулевые. Следующие замены неизвестных $p = v + u, q = v - u, P_0 = V_0 + U_0, Q_0 = V_0 - U_0$ и введение комплексных переменных $H = p + iq, H_0 = P_0 + iQ_0$ и комплексного аргумента (черта означает сопряжение), $s = x + iat$ дают запись уравнения для H в виде:

$$i \left(\frac{\partial H}{\partial s} - \frac{\partial H}{\partial \bar{s}} \right) + \alpha \left(\frac{\partial(H + H_0)}{\partial s} + \frac{\partial(H + H_0)}{\partial \bar{s}} \right) + \frac{\partial \bar{H}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{s}} = 0,$$

где $\alpha = V/a$. Это уравнение является следствием системы (штрих — это производная). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial s} &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{s}} = -\frac{\alpha}{2} \left((\alpha + 1)^{-1} P'_0 + Q'_0 \right) = \lambda_1, \\ \frac{\partial H}{\partial \bar{s}} &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial s} = -\frac{\alpha}{2} \left((\alpha + 1)^{-1} P'_0 - Q'_0 \right) = \lambda_2. \end{aligned}$$

Уравнения последней системы в общем случае (в области плоскости s ненулевой меры) несовместны, но предлагается метод нахождения решения $H(s, \bar{s})$ на кривой $s(\tau)$ посредством интегрирования уравнения

$$H' = s' \frac{\partial H}{\partial s} + \bar{s}' \frac{\partial H}{\partial \bar{s}},$$

$(\cdot)' = d/d\tau$ вдоль нее при условии совместности $\partial \lambda_1 / \partial \bar{s} = \partial \lambda_2 / \partial s$.

Для нахождения $s(\tau)$ рассматривается двумерная гамильтонова система над полем комплексных чисел (гамильтониан G), ее первая координата — полученное уравнение. Приняты обозначения $\partial G / \partial P^*$ — это вектор-строка градиента функции $G(P)$, P — вектор-строка аргумента, $*$ — эрмитово сопряжение, $\partial G / \partial P$ — вектор-столбец. Далее,

$$\begin{aligned} P(\tau) &= (H', \bar{H}'), \quad Q(\tau) = (s, \bar{s}), \quad P = Q' \Lambda, \quad G = \frac{1}{2} P \Lambda^{-1} P^*, \\ \Lambda^{-1} &= \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad P' = -\frac{\partial G}{\partial Q^*}, \quad Q' = \frac{\partial G}{\partial P^*}. \end{aligned}$$

Для этой системы применяется метод канонических преобразований (метод Гамильтона-Якоби). Каноническое преобразование имеет производящую функцию S вида

$$S = R(Q)I^*, \quad P^* = \frac{\partial S}{\partial Q} = \left(\frac{\partial R}{\partial Q} \right) I^*, \quad \varphi = -\frac{\partial S}{\partial I^*} = -R,$$

т. е. $A^* \Lambda^{-1} A = E$ и

$$\left(\frac{\partial R}{\partial Q} \right) = A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix},$$

а преобразованная гамильтонова система имеет вид $\varphi' = -I$, $I' = 0$, т. е. I , φ — это переменные типа действие–угол.

Отсюда получается следующая цепочка равенств:

$$P^* = AI^*, \quad P = IA^* = Q'\Lambda, \quad Q' = IA^* \Lambda^{-1} = IA^{-1},$$

тогда

$$s' = I_1 \sqrt{-\frac{\alpha + 1}{2\alpha P'_0}} + \frac{I_2}{\sqrt{-2\alpha Q'_0}}.$$