А. Н. Фролов (Санкт-Петербург, СПбГУ). **Об асимптотическом поведении приращений обобщенных процессов восстановления.**

Пусть (X, Y), $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных (н. о. р.) случайных векторов, $\mathbf{E}\, X = \lambda \in (0, \infty)$, $\mathbf{P}\,\{Y > 0\} = 1$ и $\mathbf{E}\, Y = \mu \in (0, \infty)$. (Подчеркнем, что случайные величины X и Y могут быть зависимыми.) Определим процесс восстановления $N(t)$ и обобщенный процесс восстановления $\xi(t)$, соответственно, соотношениями $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I\{Y_1 + \cdots + Y_n \leqq t\}$ и $\xi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n I\{Y_1 + \cdots + Y_n \leqq t\}$, $t \geqq 0$, где $I\{\cdot\}$ обозначает индикатор события в скобках. Ясно, что если $N(t) \geqq 1$, то $\xi(t) = X_1 + \cdots + X_{N(t)}$.

Класс обобщенных процессов восстановления включает в себя, в частности, процессы восстановления, пуассоновские и обобщенные пуассоновские процессы, процессы суммирования н. о. р. случайных величин.

Пусть a_T — такая неубывающая непрерывная функция, что $1 \leqq a_T \leqq T$ и T/a_T не убывает. Положим

$$W_T = \sup_{0 \leqq t \leqq T - a_T} \sup_{1 \leqq s \leqq a_T} \left(\xi(t+s) - \xi(t) - \frac{\lambda}{\mu} s \right).$$

Мы описываем асимптотическое почти наверное (п. н.) поведение нормированных максимумов типа W_T и их аналогов, построенных по нецентрированным приращениям. Аналогичные результаты для процессов восстановления, процессов с независимыми приращениями (в частности, пуассоновских и обобщенных пуассоновских процессов), сумм н. о. р. случайных величин содержатся в работах [1–5].

Характер поведения W_T существенно зависит от скорости роста функции a_T. В случае больших ($a_T / \log T \to \infty$) приращений, нормирующая последовательность зависит лишь от некоторых численных характеристик рассматриваемых величин, подобно нормировке из закона повторного логарифма (ЗПЛ) для сумм н. о. р. случайных величин. Результаты для больших приращений называют законами Чёргё–Ревеса.

Теорема. *Предположим, что одна из случайных величин, X или Y, ограниченна, а производящая функция моментов второй величины конечна в некотором невырожденном интервале с левым концом в нуле. Пусть $\sigma^2 = \mathbf{D}\,(X - \frac{\lambda}{\mu} Y) < \infty$ и $a_T / \log T \to \infty$ при $T \to \infty$.*

Тогда

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{W_T}{\sqrt{2(\sigma^2/\mu) a_T (\log (T/a_T) + \log\log T)}} = 1 \quad \textit{п.н.} \tag{1}$$

Если дополнительно $\log\log T = o\,(\log(T/a_T))$, то в последнем соотношении можно заменить $\limsup$ на $\lim$.

Отметим, что при $a_T = T$ из (1) мы получаем ЗПЛ для W_T.

Рассмотрены также неограниченные случайные величины, случайные величины без экспоненциального момента и случай $\sigma^2 = \infty$ (для больших приращений) и малые ($a_T = O(\log T)$) приращения. Нормировка для малых приращений зависит от всего распределения $X - \frac{\lambda}{\mu} Y$. Результаты этого типа называют законами Эрдеша–Реньи.

Приводимые результаты вытекают из универсальных предельных теорем, объединяющих в единое целое законы Эрдеша–Реньи, законы Чёргё–Ревеса, усиленный закон больших чисел и ЗПЛ для рассматриваемых процессов.

Обсуждается также закон Эрдеша–Реньи для самонормированных приращений обобщенных процессов восстановления.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 05-01-00486).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Frolov A. N.* One-sided strong laws for increments of sums of i.i.d. random variables. — Studia Sci. Math. Hungar., 2002, v. 39, p. 333–359.
2. *Фролов А. Н.* Предельные теоремы для приращений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 1, с. 104–121.
3. *Фролов А. Н.* Сильные предельные теоремы для приращений процессов восстановления. — Записки научных семинаров ПОМИ, 2003, т. 298, с. 208–225.
4. *Фролов А. Н.* Универсальные предельные теоремы для приращений процессов с независимыми приращениями. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 3, с. 601–609.
5. *Frolov A. N.* Converses to the Csörgő–Révész laws. — Statist. Probab. Let., 2005, v. 72, p. 113–123.