

В. Л. Кураккин (Москва, ТВП). **Критерий регулярности свободного регистра сдвига.**

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ — алфавит, X^* — множество всех слов над X и M — произвольное множество. *Левым сдвигом множества $T \subset X^*$ на вектор $\bar{x} \in X^*$* назовем множество $\bar{x}T = \{\bar{x}\bar{t} : \bar{t} \in T\}$, *левой границей множества T в направлении s ($1 \leq s \leq k$)* — множество $\partial_s T = x_s T \setminus T$, и *левой границей множества T* — множество $\partial T = \cup_{s=1}^k \partial_s T$. Множество всех функций $u: T \rightarrow M$ обозначим M^T . Если $T = \{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n\}$, то функцию $u: T \rightarrow M$ отождествим с вектором $u[T] = (u(\bar{t}_1), \dots, u(\bar{t}_n)) \in M^n$. Подмножество $\mathcal{F} \subset X^*$ назовем *правой диаграммой Ферре*, если для любых $\bar{x}, \bar{y} \in X^*$: $\bar{x}\bar{y} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{y} \in \mathcal{F}$.

Правым регистром сдвига [1] называется пара $(\mathcal{F}, \Phi)$, где $\Phi: M^{\mathcal{F}} \rightarrow M^{\partial \mathcal{F}}$ — произвольное отображение, называемое *функцией обратной связи* (или *законом рекурсии*). Отображение $\Psi_s: M^{\mathcal{F}} \rightarrow M^{\mathcal{F}}$, определяемое следующим образом: $\Psi_s(u[\mathcal{F}]) = v[\mathcal{F}]$, где для $\bar{x} \in \mathcal{F}$

$$v(\bar{x}) = \begin{cases} u(x_s \bar{x}), & \text{если } x_s \bar{x} \in \mathcal{F}, \\ \Phi(u[\mathcal{F}])(x_s \bar{x}), & \text{если } x_s \bar{x} \in \partial_s \mathcal{F}, \end{cases}$$

назовем *отображением сдвига в направлении s* . Правый регистр сдвига $(\mathcal{F}, \Phi)$ назовем *регулярным*, если все отображения Ψ_s , $1 \leq s \leq k$, биективны. При $k = 1$ данное определение совпадает со стандартным определением регулярности обычного регистра сдвига.

Известен критерий регулярности обычного регистра сдвига, заключающийся в том, что функция обратной связи должна быть биективна по первой переменной. Сформулируем аналогичный критерий регулярности для введенного выше правого регистра сдвига $(\mathcal{F}, \Phi)$.

Композицию отображения Φ и естественной проекции $M^{\partial \mathcal{F}} \rightarrow M^{\partial_s \mathcal{F}}$ обозначим Φ_s . Зафиксируем s и разобьем $\mathcal{F}$ на два подмножества:

$$\mathcal{F} = A \cup B, \quad \text{где} \quad A = \mathcal{F} \setminus x_s \mathcal{F}, \quad B = \mathcal{F} \cap x_s \mathcal{F}, \quad A \cap B = \emptyset.$$

Тогда $|A| = |\partial_s \mathcal{F}|$. Пусть $|A| = r$, $|\mathcal{F}| = n$ и $\mathcal{F} = \{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n\}$. Занумеруем элементы в $\mathcal{F}$ так, чтобы сначала шли элементы из A , а затем из B . Отображение $\Phi_s: M^{\mathcal{F}} \rightarrow M^{\partial_s \mathcal{F}}$ запишем в виде

$$\Phi_s(u[\mathcal{F}]) = \Phi_s(u[A], u[B]) = \Phi_s(u(\bar{t}_1), \dots, u(\bar{t}_r), u(\bar{t}_{r+1}), \dots, u(\bar{t}_n)).$$

Будем говорить, что отображение Φ_s биективно по переменным $u[A]$, если для любых фиксированных $u[B] \in M^B$ биективно отображение

$$\Phi_{s,u[B]}: M^A \rightarrow M^{\partial_s \mathcal{F}}, \quad \Phi_{s,u[B]}(u[A]) = \Phi_s(u[A], u[B]).$$

Теорема. *Правый регистр сдвига $(\mathcal{F}, \Phi)$ регулярен тогда и только тогда, когда для любого s , $1 \leq s \leq k$, отображение Φ_s биективно по переменным $u[A]$, где $A = \mathcal{F} \setminus x_s \mathcal{F}$.*

Работа поддержана грантом Президента РФ НШ-8564.2006.10.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кураккин В. Л. Свободные регистры сдвига. I. — В сб.: Труды по дискретной математике. Т. 9. М.: Гелиос-АРВ, 2006.