Ф. С. Насыров (Уфа, УГАТУ). **Обобщенные итовские интегралы и гауссовские процессы.**

Пусть $\tau(\cdot)$ — такая произвольная борелевская мера на $[0,1]$, что случайный процесс с непрерывными реализациями $X(s)$ обладает локальным временем $\alpha_\tau(s,u)$, совместно непрерывным с вероятностью 1 по переменным (s,u), положим $\gamma_\tau(x,u) = \inf\{s : \alpha_\tau(s,u) \geqslant x\}$. Тогда обобщенный стохастический τ-интеграл Ито по процессу $X(s)$ может быть определен (см. [1]) согласно формуле

$$(E)\int_0^t g(s){*}d_\tau X(s) = \int_0^t g(s)\,d_\tau X(s) + \frac{1}{2}P\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \frac{1}{2\varepsilon}[g_\tau(s,X(s)+\varepsilon) - g_\tau(s,X(s)-\varepsilon)]\,ds,$$

где интеграл в левой части есть расширенный симметричный τ-интеграл, $g(s)$ — непрерывная слева ограниченная случайная функция, $g_\tau(s,u) = g(\gamma_\tau(\alpha_\tau(s,u),u))$, если конечны расширенный симметричный τ-интеграл и указанный предел по вероятности. Известно, что при определенных условиях, налагаемых на интегранд, классический интеграл Ито есть мартингал и, в частности, его математическое ожидание равно нулю. Выделим условия, при которых последнее свойство частично сохраняется для обобщенных τ-интегралов Ито.

Пусть выполнены следующие условия:

1) С вероятностью 1 мера $\tau(\cdot)$ абсолютно непрерывна: $\tau(ds) = f(s,X(s))\,ds$, где $f(s,u)$ — неслучайная функция.

2. Функция $f(s,u)$, связанная с плотностью $f(s,X(s))$, имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial}{\partial u}f(s,u)$, $\frac{\partial^2}{\partial u^2}f(s,u)$, $(s,u)\in(0,1]\times\mathbf{R}$.

3. Одномерные плотности распределения $p(s,u) = \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{P}\{X(s)\leqslant u\}$ процесса $X(s)$ имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial}{\partial u}p(s,u)$, $\frac{\partial^2}{\partial u^2}p(s,u)$, $\frac{\partial}{\partial s}p(s,u)$, $(s,u)\in(0,1]\times\mathbf{R}$.

4. При любом $s\in(0,1]$ справедливы равенства:

$$\lim_{u\to\infty} f(s,u)p(s,u) = 0, \qquad \lim_{u\to\infty}\frac{\partial}{\partial u}[f(s,u)p(s,u)] = 0.$$

Тогда следующие условия равносильны:

(a) для любого $t\in(0,1]$ и произвольной финитной функции $h(u)\in C^1(\mathbf{R})$

$$\mathbf{E}\int_0^t h(X(s))\,dX_\tau(s) = 0 \quad \text{для любого} \quad t.$$

(b) плотности $p(s,u)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial}{\partial s}p(s,u) = \frac{\partial^2}{\partial u^2}[f(s,u)p(s,u)], \qquad (s,u)\in(0,1]\times\mathbf{R}.$$

Пусть функция $f(s,x)$ имеет вид $f(s,x)\equiv f(s)$. Тогда последнему уравнению удовлетворяют одномерные плотности распределений центрированных гауссовских процессов с $f(s) = \sigma(s)'$, где $\sigma^2(s) = \mathbf{D}\,X(s)$. В первом случае построенный стохастический интеграл совпадает с соответствующим интегралом, предложенным в работе [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Насыров Ф. С.* Обобщенная формула Ито и итовские интегралы. — Теория вероятн. и ее примен. (В печати.)
2. *Alos T.*, *Mazet O.*, *Nualart D.* Stochastic calculus with respect to Gaussian processes. — Ann. Probab., 2001, v. 27, № 2, p. 766–801.