

Г. И. Б е л я в с к и й, В. В. М и с ю р а (Ростов-на-Дону, РГСУ). **Аппроксимация одного неполного (B, S) -рынка KPP (B, S) -рынком с динамически изменяющимися параметрами.**

Рассмотрим (B, S) -рынок, где B_n, S_n — адаптированные последовательности случайных величин на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, выражающие, соответственно, стоимости безрискового и рискованного активов, причем $S_n > 0, B_n > 0, n = 0, 1, \dots, N, \mathcal{F}_n \in \sigma(h_1, h_2, \dots, h_n)$, где $h_n = \ln(\hat{S}_n/\hat{S}_{n-1})$ и $\hat{S}_n = S_n/B_n$ есть дисконтированная стоимость рискованного актива.

Опишем поведение рискованного актива в модели стохастической волатильности.

Модель включает в себя два источника случайности: $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ и $\delta = (\delta_n)$, которые в простейшем случае предполагаются независимыми и стандартными гауссовскими последовательностями, определяющими поведение последовательности

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \quad \text{где} \quad \sigma_n = e^{\Delta_n/2}, \quad \Delta_n = a_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \Delta_{n-i} + c \delta_n. \quad (1)$$

Рассмотрим модель в случае $p = 1$ и $|\alpha_1| < 1$:

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \quad \Delta_n = a_0 + a_1 \Delta_{n-1} + c \delta_n. \quad (2)$$

В [1] показано, что описанный выше рынок является неполным и безарбитражным. Аппроксимируем данный рынок KPP (B, S) -рынком с динамически изменяющимися параметрами.

В модели Кокса–Росса–Рубинштейна с динамически изменяющимися параметрами для произвольного момента времени n приращение дисконтированной стоимости вычисляется по формулам:

$$\Delta \hat{S}_n(B_{2i+1}^n) = a_n \hat{S}_{n-1}(B_i^{n-1}), \quad \Delta \hat{S}_n(B_{2i}^n) = b_n \hat{S}_{n-1}(B_i^{n-1}), \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3)$$

где $a_n, b_n \in \Phi_{n-1}, -1 < a_n < 0 < b_n$.

Возрастающая последовательность σ -алгебр $\Phi_n \subset \mathcal{F}_n$ имеет следующую структуру: $\Phi_0 = \{\Omega, \emptyset\}$, $\Phi_n = \sigma\{B_0^{(n)}, B_1^{(n)}, \dots, B_{2^n-1}^{(n)}\}$, $B_i^{(n-1)} = B_{2i}^{(n)} \cup B_{2i+1}^{(n)}, B_i^{(n)} \cap B_j^{(n)} = \emptyset$ ($i \neq j$), $n = 1, 2, \dots, N$. Положим

$$a_n = e^{-\xi_n} - 1, \quad b_n = e^{\xi_n} - 1, \quad (4)$$

где ξ_n — оценка $|h_n|$ и h_n описывается моделью (2).

Для оценки параметров модели (2) будем применять метод максимального правдоподобия Фишера. В [2] приведен итерационный алгоритм для получения максимально правдоподобных оценок параметров модели (2).

Формула для вычисления прогнозного значения h_{n+m} приводится в работе [3]:

$$\mathbf{E}(\ln h_{n+m}^2 | \mathcal{F}_n^h) = \mathbf{E} \ln \varepsilon_n^2 (1 - \alpha_1^m) + \alpha_0 \frac{1 - \alpha_1^m}{1 - \alpha_1} + \alpha_1 \ln h_n^2, \quad (5)$$

где $\mathbf{E} \ln \varepsilon_n^2 \approx -1,27$ и $\mathcal{F}_n^h \in \sigma(h_1, h_2, \dots, h_n)$. Учитывая, что оценка последовательности $|h_n|$ является $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримой, и формулу (5), получаем соотношение $\mathbf{E}(\ln h_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}^h) = -1,27(1 - \alpha_1) + \alpha_0 + \alpha_1 \ln h_{n-1}^2$. потенцированием которой можно найти $|h_n|$, а, следовательно, и a_n и b_n по формуле (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Теория. М.: Фазис, 1998, 510 с.
2. *Белявский Г. И., Мисюра В. В.* Вычисление оценок параметров модели стохастической волатильности эволюции рискованных активов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2004, т. 11, в. 4, с. 757–758.
3. *Белявский Г. И., Мисюра В. В.* Прогнозирование поведения рискованных активов с помощью модели стохастической волатильности. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2005, т. 12, в. 3, с. 702.