

А. А. Б у т о в, М. А. В о л к о в, К. О. Р а в о д и н, М. В. З о р и н
(Ульяновск, УлГУ). Диффузионная аппроксимация для процесса с множественной разладкой.

В работе, представленной данным сообщением, рассматривается применение метода диффузионной аппроксимации к стохастическому процессу с множественной разладкой. Процессы с множественной разладкой могут использоваться при описании переходных явлений в технических и медико-биологических системах (например, работа механизмов в различных форсированных режимах, многостадийное перерождение опухолевой ткани, эволюция популяции). Примеры разработанных стохастических моделей в терминах порцессов с разладкой можно посмотреть в работах [1]–[3]. В результате изнашивания или истощения после нескольких переходов (стадий) механизм разрушается или организм гибнет.

Пусть задан стохастический базис $\mathbf{B} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}^{(n)} = (\mathcal{F}_t^{(n)})_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ с начальной σ -алгеброй $\mathcal{F}_0 = \sigma\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ и $\xi_0 = 0$, где $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $|\xi_i| \leq c < \infty$ и $m = \mathbf{E} \xi_i > 0$, $i = 1, 2, \dots$. На базисе $\mathbf{B}$ задан пуассоновский процесс $\pi^{(n)} = (\pi_t^{(n)})_{t \geq 0}$ с $\tilde{\pi}_t^{(n)} = nt$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда процесс с множественной разладкой записывается в виде

$$X_t^{(n)} = \int_0^t \xi_{\pi_s^n} ds + \sigma W_t, \quad (1)$$

где $\sigma \neq 0$, $\xi_0 = 0$ и $W = (W_t)_{t \geq 0}$ — стандартный винеровский процесс. Предполагается, что $\{W, \{\xi_i\}_{i \geq 1}, \pi\}$ независимы. Обозначим момент остановки $\tau = \inf\{t : t > 0, X_t^{(n)} = 1\}$ — первый момент пересечения процессом $X_t^{(n)}$ единицы, тогда в выше приведенных обозначениях справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть на стохастическом базисе $\mathbf{B}$ задан процесс $X^{(n)} = (X_t^{(n)})_{t \geq 0}$ с множественной разладкой вида (1) и $m = \mathbf{E} \xi_i > 0$, $i = 1, 2, \dots$, тогда для условного математического ожидания момента остановки $\tau = \inf\{t : t > 0, X_t^{(n)} = 1\}$ имеет место сходимость

$$\mathbf{E}\{\tau | \tau > t, \mathcal{F}_t^{(n)}\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} \frac{1 - X_t^{(n)}}{m} I\{\tau > t\}.$$

В случае, когда $m = \mathbf{E} \xi_i = 0$, $i = 1, 2, \dots$, и процесс с множественной разладкой имеет вид

$$X_t^{(n)} = \sqrt{n} \int_0^t \xi_{\pi_s^n} ds + \sigma W_t, \quad (2)$$

справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть на стохастическом базисе $\mathbf{B}$ задан процесс $X^{(n)} = (X_t^{(n)})_{t \geq 0}$ с множественной разладкой вида (2) и $m = \mathbf{E} \xi_i = 0$, $i = 1, 2, \dots$, тогда имеет место слабая сходимость

$$X^{(n)} \xrightarrow{w} \alpha \overline{W},$$

где $\overline{W} = (\overline{W}_t)_{t \geq 0}$ — стандартный винеровский процесс, $\alpha^2 = \sigma^2 + 2\zeta^2$, $\zeta^2 = \mathbf{E} \xi_i^2$ и выполняется условие $\mathbf{E}\{\tau | \tau > t, \mathcal{F}_t^{(n)}\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство утверждений 1 и 2 проводится методом диффузионной аппроксимации.

Результаты работы были использованы при построении математических и имитационных компьютерных моделей многостадийного канцерогенеза роста при старении.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 06–01–00338.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутов А. А., Волков М. А. Эволюционно обусловленная гетерогенность популяции в простой модели с процессом с разладкой. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2002, т. 9, в. 1, с. 110–111.
2. Бутов А. А., Волков М. А. Оптимальное управление параметрами разладки в задаче максимизации энергопродуктивности и результирующая гетерогенность популяции. — Проблемы управления, 2004, № 4, с. 54–57.
3. Бутов А. А., Волков М. А. Одна задача о разладке для процессов с траекториями с финитными носителями. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 1, с. 73–74.