

В. П. А р х и п о в (Старый Оскол, СТИ МИСиС). **Уравнения переменного типа. Асимптотика решений вблизи гиперплоскости вырождения.**

В ограниченной области $\Omega = [\alpha, \beta] \times G \subset \mathbf{R}^{n+1}$, $x \in [\alpha, \beta]$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in G \subset \mathbf{R}^n$, для дифференциальных уравнений вида

$$(a(x)u'_x(x, y))'_x + bu'_x(x, y) + A(y)u(x, y) = f(x, y), \quad a(x_0) = 0, \quad b \neq 0, \quad x_0 \in [\alpha, \beta], \quad (1)$$

где

$$A(y)u = \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{i,j}(y)D_j u) + cu, \quad \left(D_i u = \frac{\partial u}{\partial y_i} \right) \quad (2)$$

есть эллиптический в $\overline{G}$ оператор по переменным y , $a(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$, рассматривается возможность постановки и решения граничных задач типа Дирихле в зависимости от распределения знаков коэффициентов $a(x), b$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ и расположения спектра оператора A , порожденного дифференциальным выражением (2) и соответствующими краевыми условиями (см. [1], [2]). Так, например, при выполнении условий $(x - x_0)a(x) > 0$ при $x \neq x_0$, $b < 0$ и отрицательной определенности первой краевой задачи для оператора A устанавливается однозначная разрешимость уравнения (1) при дополнительных условиях

$$u|_{x=\alpha} = u_\alpha, \quad u'_x|_{x=\alpha} = u'_\alpha, \quad u|_{x=\beta} = u_\beta, \quad u|_{y \in S_G} = 0, \quad (3)$$

где S_G — достаточно гладкая поверхность, ограничивающая область G .

В силу структуры уравнения (1), допускающей разделение переменных, исследование разрешимости соответствующих краевых задач сводится к рассмотрению вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка

$$(a(x)X'(x))' + bX'(x) + \lambda X(x) = f(x), \quad a(x_0) = 0, \quad b \neq 0, \quad x_0 \in [\alpha, \beta], \quad (4)$$

вблизи точки вырождения $x = x_0$. В частности, доказано, что существуют решения $X_{1,2}(x)$ однородного уравнения (4), допускающие при $x \rightarrow x_0 + 0$ асимптотические представления

$$X_1(x) = v_1(x) \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x), \quad X_2(x) = v_2(x) \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x),$$

где $\{\varphi_k(x)\}, \{\psi_k(x)\}$ — асимптотические при $x \rightarrow x_0 + 0$ функциональные последовательности, заданные рекуррентными соотношениями $\varphi_{k+1}(x) = K_1 \varphi_k(x)$, $\varphi_0(x) \equiv 1$ и $\psi_{k+1}(x) = K_2 \psi_k(x)$, $\psi_0(x) \equiv 1$. Здесь $K_{1,2}$ — интегральные операторы: $K_1 \varphi(x) = \int_{x_0}^{x_0+\delta} K_1(x, x_1) \varphi(x_1) dx_1$, $K_2 \psi(x) = \int_{x_0}^x K_2(x, x_1) \psi(x_1) dx_1$ ($\delta > 0$) с ядрами $K_1(x, x_1) = h(x_1)$, если $x_0 \leq x_1 \leq x$, $K_1(x, x_1) = h(x_1)e^{w(x_1)-w(x)}$, если $x \leq x_1$, и $K_2(x, x_1) = -h(x_1)[1 - e^{w(x)-w(x_1)}]$, $x_0 \leq x_1 \leq x$, $w(x) = \int_x^{x_0+\delta} (\alpha(\tau)/a(\tau)) d\tau$, $\alpha(x) = \sqrt{b^2 - 4\lambda a(x)}$, $h(x) = (\alpha^{-1}(x)/4)(a(\alpha'/\alpha)^2 - 2(a\alpha'/\alpha)')$ и функции $v_{1,2}(x)$ определяются формулами $v_{1,2}(x) = \alpha^{-1/2}(x) \exp\{\int_x^{x_0+\delta} ((b \pm \alpha(\tau))/(2a(\tau))) d\tau\}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 06-08-96312.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архипов В. П., Глушко В. П.* Априорная оценка решений краевых задач для некоторых эллиптико-параболических уравнений второго порядка. — Труды математического факультета ВГУ, 1971, в. 3, с. 22–34.
2. *Розов Н. Х., Сушко В. Г., Чудова Д. И.* Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. — Фундаментальная и прикладная математика, 1998, т. 4, № 3, с. 1063–1095.