

В. И. Р я ж с к и х, М. И. С л ю с а р е в, А. А. Б о г е р, С. В. Р я б о в (Воронеж, ВГТА). **Об одном аналитическом решении предельной внутренней задачи ламинарной свободной конвекции в прямоугольной области.**

Рассмотрена задача об осесимметричной ламинарной свободной конвекции в прямоугольной области вязкой несжимаемой жидкости, имеющей в начальный момент времени $\tau = 0$ однородную температуру t_0 . При $\tau > 0$ мгновенно устанавливается постоянная и одинаковая температура боковых стенок t_w , отличная от начальной температуры жидкости. Для случая, когда высота области значительно превышает ее ширину, уравнения Обербека–Буссинеска в переменных Гельмгольца таковы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} &= 4 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + 16 \text{Gr} \frac{\partial T}{\partial X}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} = -\frac{1}{8} \Omega, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{4}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial X^2}, \\ \Omega(X, 0) &= \Omega(0, \theta), \quad \Omega(1, \theta) = -8 \frac{\partial^2 \Psi(1, \theta)}{\partial X^2}, \quad \Psi(X, 0) = \Psi(0, \theta) = \Psi(1, \theta) = 0, \\ T(X, 0) &= T_0, \quad \frac{\partial T(0, \theta)}{\partial X} = T(1, \theta) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\theta = \tau v / h^2$, $X = 2x / h$, $\Psi = \psi / (2v)$, $\Omega = \omega h^2 / v$, $T = (t - t_w) / t_0$, $T_0 = (t_0 - t_w) / t_0$, $\text{Gr} = gh^3 \beta t_0 / (8v^2)$; τ , x — текущее время и поперечная координата; v , β , Pr — кинематическая вязкость, коэффициент расширения и число Прандтля жидкости; h — ширина полости; ψ , ω — функции тока и вихря; g — ускорение силы тяжести.

Ввиду неполноты системы (1), она дополнена условиями

$$\frac{\partial^2 \Psi(0, \theta)}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 \Psi(1, \theta)}{\partial X^2} = \Psi(1, \theta) - \Psi(0, \theta) = 0. \quad (2)$$

Аналитическое решение системы (1), (2):

$$\begin{aligned} T(X, \theta) &= 2T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\mu_n X)}{\mu_n \sin \mu_n} \exp \left\{ -\frac{4\mu_n^2}{\text{Pr}} \theta \right\}, \\ V(X, \theta) &= \frac{d\Psi(X, \theta)}{dX} = \frac{\text{Gr} T_0 \text{Pr}}{1 - \text{Pr}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\cos(\mu_n X)}{\mu_n^2 \sin \mu_n} - \frac{\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n}{\mu_n^2 \sin \mu_n} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\cos(\mu_n X / \sqrt{\text{Pr}}) - \cos(\mu_n / \sqrt{\text{Pr}})}{\sqrt{\text{Pr}} \sin(\mu_n / \sqrt{\text{Pr}}) - \mu_n \cos(\mu_n / \sqrt{\text{Pr}})} \right) \exp \left\{ -\frac{4\mu_n^2}{\text{Pr}} \theta \right\} \Big] \\ &\quad + \frac{\text{Gr} T_0}{(1 - \text{Pr}) \sqrt{\text{Pr}}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sin \sqrt{\text{Pr}} \varepsilon_k - \sqrt{\text{Pr}} \varepsilon_k \cos(\sqrt{\text{Pr}} \varepsilon_k)}{\varepsilon_k^2 \cos(\sqrt{\text{Pr}} \varepsilon_k)} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\cos(\varepsilon_k X) - \cos \varepsilon_k}{\varepsilon_k \cos \varepsilon_k} \exp \{ -4\varepsilon_k \theta \} \right], \end{aligned}$$

где $\mu_n = \pi/2 + \pi n$, $\varepsilon_k = \pi k$, $V = vh / v$, v — вертикальная скорость жидкости. В частности, если $\text{Pr} = 1$, то решение задачи имеет аналогичную структуру.

Анализ решения показал, что из-за параболичности уравнений системы (1), (2) имеет место ненулевой профиль скорости в начальный момент времени. Путем дополнительного решения гиперболического уравнения теплопереноса установлено, что время релаксации температурного возмущения существенно меньше продолжительности установления теплового равновесия, что свидетельствует об адекватности принятых допущений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 07–08–00166, и гранта Президента РФ МК–4706.2006.08.