

И. А. Ефимова (Чита, ЗаБИП). **О решении краевых задач в кусочно-однородном круге.**

Исследование динамических процессов (теплопроводности, фильтрации и т. д.) в кусочно-однородных средах приводит к решению краевых задач с условиями сопряжения. В математической физике большую роль играют формулы, выражающие решения усложненных задач через известные решения классических краевых задач. В качестве усложненной задачи рассмотрим в круге $D = D_1(0 < r < l) \cup D_2(l < r < h)$ задачу сопряжения с граничным условием первого рода

$$r\partial_r(r\partial_ru_i) + \partial_\alpha^2 u_i = 0, \quad u_2|_{r=h} = f(\alpha), \quad (1)$$

$$r = l: \quad u_1 = u_2, \quad k_1\partial_ru_1 = k_2\partial_ru_2, \quad (2)$$

где k_i — проницаемость области D_i , (r, α) — полярные координаты. Выразим решение задачи (1), (2) через известное решение $F(r, \alpha)$ классической задачи Дирихле (1) в круге $D(r < h)$. Следуя методу статьи [1], представим решение задачи (1), (2) и функцию F в виде разложений Фурье

$$u_1 = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{l}\right)^n S_n, \quad u_2 = F(r, \alpha) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\left(\frac{r}{h}\right)^n - \left(\frac{h}{r}\right)^n \right] S_n, \quad (3)$$

$$F(r, \alpha) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{h}\right)^n S_n, \quad (4)$$

где $S_n = f_1 \sin n\alpha + f_2 \cos n\alpha$, f_i — коэффициенты Фурье разложения граничной функции $f(\alpha) = f_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n$, при этом функции (3) ограничены в D_i и удовлетворяют условиям (1). Из условий сопряжения (2) найдем $a_n = (1 - \nu)p^n(1 - q)^{-1}$, $b_n = 2\nu p^{2n}(1 - q)^{-1}$, $\nu = (k_1 - k_2)(k_1 + k_2)^{-1}$, $q = \nu p^{2n}$, $p = l/h$, где $|q| < 1$. Разлагая $(1 - q)^{-1}$ в ряд и используя формулу (4), выразим решение задачи (1), (2) непосредственно через заданную функцию F в виде компактных формул

$$u_1 = (1 - \nu) \sum_{m=0}^{\infty} \nu^m F(p^{2m}r, \alpha),$$

$$u_2 = F(r, \alpha) + \sum_{m=1}^{\infty} \nu^m [f(p^{2m}r, \alpha) - F(p^{2m}h^2/r, \alpha)],$$

при этом полученные ряды в силу $|\nu| < 1$, $p < 1$ сходятся достаточно быстро.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения. — Журнал вычислительной математики и математической физики, 2007, т. 47, № 9, с. 1575–1581.