А. И. Мартикайнен (Санкт-Петербург, СПбГУ). **О законе повторного логарифма с правильно меняющейся нормируюшей последовательностью.**

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Обозначим

$$K(x) = \mathbf{E}\, X^2\, I\,\{|X| \leqslant x\} - (\mathbf{E}\, X\, I\,\{|X| \leqslant x\})^2$$

дисперсию усеченной на уровнях $\pm x$ случайной величины X. Ясно, что $K(x)$ при $x \geqslant 0$ не убывает. Нам понадобятся функции $e_\tau(x) = \exp\{(\ln x)^\tau\}$, $x \geqslant 1$, зависящие также от параметра $\tau > 0$. При $0 < \tau < 1$ они медленно меняются на бесконечности.

Теорема. *Если $h(x)$ — такая неубывающая и положительная при $x \geqslant 1$ функция, что отношение $h(2x)/h(x)$ остается ограниченным, выполнено условие*

$$\limsup \frac{\ln\ln n\; K(c_n)}{h(ne_\tau(n))} = \limsup \frac{\ln\ln n\; K(c_n)}{h(n)} = \frac{\lambda^2}{2} \leqslant \infty$$

с $c_n = \sqrt{nh(n)}$, и, кроме того, $\sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}\,\{|X| > c_n\} < \infty$, то

$$\sqrt{\tau}\,\lambda \leqslant \lim\, sup \frac{X_1 + \cdots + X_n - a_n}{c_n} \leqslant \lambda \quad \text{п. н.}$$

Здесь $a_n = \operatorname{median}(X_1 + \cdots + X_n)$, либо (что часто удобнее в вычислениях) $a_n = n\,\mathbf{E}\,X\,I\,\{|X| \leqslant c_n\}$. Если $\mathbf{E}\,X = 0$, то можно положить $a_n = 0$.

В недавней работе [1] эта форма закона повторного логарифма получена в предположении, что $\mathbf{E}\,X = 0$, и при дополнительном условии $h(ne_\tau(n))/h(n) \to 1$ при $x \to \infty$. Последнее приводит к тому, что функция $h(x)$ медленно (весьма медленно) меняется на бесконечности, нормирующая последовательность c_n правильно меняется с показателем $1/2$. Поэтому условия теоремы Айнмаля и Ли выполняются лишь для распределений с конечными степенными моментами всех порядков, меньших двух. Напротив, формулируемая выше теорема применима и к распределениям с бесконечным степенными моментами, а нормирующая последовательность c_n может расти иногда быстрее n.

Продвижение достигнуто в результате использования критерия применимости ЗПЛ из [2] вместо аналогичного более позднего и менее общего критерия из [1].

Исследование выполнено при частичной поддержке грантов РФФИ 05–01–00486 и ВНШ–4222.2006.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Einmahl U., Li D.* Some results on two-sided lil behavior. — Ann. Probab., 2005, v. 33, p. 1601–1624.
2. *Мартикайнен А. И.* Критерии сильной сходимости нормированных сумм независимых случайных величин и их приложения. — Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. XXIX, с. 501–516.