Л. П. Усольцев (Самара, СамГУ). **Об асимптотике и больших уклонениях в теореме Форте–Каца.**

Пусть $q \geqslant 2$ — фиксированное целое число, а $f(t)$ — вещественнозначная суммируемая с квадратом на отрезке $[0,1]$ периодическая функция с периодом 1 и коэффициентами Фурье $a_m = \int_0^1 f(t)e^{2\pi imt}\,dt$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, удовлетворяющими условию

$$|a_m| \leqslant \frac{A}{|m|^\alpha}, \qquad m = \pm1, \pm2, \ldots, \tag{1}$$

где $A > 0$ и $\alpha > 1/2$ — постоянные. Для целых чисел $N \geqslant 2$ положим

$$S_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \Big(f(q^n t) - a_0 \Big), \qquad 0 \leqslant t < 1,$$

и

$$F_N(x) = \operatorname{mes}\{t \in [0,1]: \quad S_N(t) < x\}, \qquad -\infty < x < \infty,$$

а $\Phi(x)$ будем обозначать нормальную функцию распределения с параметрами $(0,1)$.

Согласно классической теореме Форте–Каца (см., например, [1], с. 77), при высказанных относительно функции $f(t)$ предположениях существует конечный предел $\sigma^2 = \lim_{N\to\infty} \int_0^1 S_N^2(t)\,dt$, $\sigma \geqslant 0$, причем в случае, когда $\sigma \neq 0$, для всех вещественных x выполняется предельное соотношение

$$\lim_{N\to\infty} F_N(\sigma x) = \Phi(x). \tag{2}$$

Исследование асимптотики в последнем соотношении для различных классов функций $f(t)$ (в зависимости от значений параметра α в соотношении (1)) проводилось как чисто вероятностными методами (здесь наиболее значимым является результат И. А. Ибрагимова [2]: если $\sigma \neq 0$, то при $N \to \infty$ равномерно по x, $-\infty < x < \infty$

$$F_N(\sigma x) = \Phi(x) + O\left(\left(\frac{\ln n}{N} \right)^{\delta/2} \right), \tag{3}$$

где $\delta = 1$ при $\alpha > 2/3$ и $\delta < (2\alpha - 1)/(1-\alpha)$ — любое при $1/2 < \alpha \leqslant 2/3$, а постоянная в символе «O» зависит от A, α, σ и $\rho_\delta = \int_0^1 |f(t)|^{2+\delta}\,dt$), так и с привлечением различных арифметических средств (см., например, книгу А. Г. Постникова [1] и работы автора [3]–[6]). А поскольку задача о распределении на единичном отрезке дробных долей показательной функции, породившая соотношение (2), имеет как вероятностную, так и арифметическую природу, более естественными и понятными представляются те методы, в которых вероятностные аспекты трактуются в русле аналитической теории чисел. Последний результат здесь такой.

Теорема. *Если $1/2 < \alpha \leqslant 1$ и $\sigma \neq 0$, то при $N \to \infty$ равномерно относительно x, $-\infty < x < \infty$*

$$F_N(\sigma x) = \Phi(x) + O\left(\sqrt{\frac{\ln n}{N}} \right)$$

(при $2/3 < \alpha \leqslant 1$, этот результат совпадает с (3), а при $1/2 < \alpha \leqslant 2/3$ является более сильным, нежели (3)), а в области $2 \leqslant x \leqslant cN^{1/8}$, где $c > 0$ — некоторая постоянная, при $N \to \infty$ выполняются соотношения

$$1 - F_N(\sigma x) = [1 - \Phi(x)] \left[1 + O\left(\frac{x^3(x + \sqrt{\ln N})}{\sqrt{N}} \right) \right],$$

$$F_N(-\sigma x) = \Phi(-x) \left[1 + O\left(\frac{x^3(x + \sqrt{\ln N})}{\sqrt{N}} \right) \right]$$

с постоянными в символах «O», зависящими от A, α и σ (этот результат перекрывает ранее известные при всех $\alpha \in (1/2, 1]$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Постников А. Г.* Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений. — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 82. М.: Наука, 1966.
2. *Ибрагимов И. А.* Центральная предельная теорема для сумм функций от независимых величин и сумм вида $\sum f(2^k t)$. — Теория вероятн. и ее применен., 1967, т. 12, в. 4, с. 655–665.
3. *Усольцев Л.П.* Центральная предельная теорема и большие уклонения для одной суммы с показательной функцией. — В Межвуз. научн. сб.: Марковские случайные процессы и их применение. Саратов: СГУ, 1980, с. 105–114.
4. *Усольцев Л. П.* О больших уклонениях для классических распределений, порождаемых дробными долями показательной функции с целым основанием. — Вестник Самарского техн. ун-та, сер. физ.-матем. науки, 2004, в. 16, с. 62–3.
5. *Усольцев Л.П.* К теореме Форте–Каца. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2004, т. 11, в. 2, с. 415–416.
6. *Усольцев Л. П.* Неулучшаемая оценка скорости сходимости к нормальному закону и асимптотика больших уклонений в одном частном случае теоремы Форте–Каца. — В сб. научн. трудов Куйбыш. пед. ин-та: Исследования по аддитивной теории чисел. 1978, т. 215, с. 45–76.