Р. Б. Фетисов (Воронеж, ВГУ). **Ограниченные решения дифференциальных уравнений третьего порядка.**

Нахождение ограниченных решений дифференциальных уравнений играет большую роль в задачах теории управления. Для линейного дифференциального уравнения третьего порядка с правой частью, удовлетворяющей условию Липшица, подсчитаны нормы интегральных операторов, использующихся при нахождении ограниченных решений на всей числовой оси. Достаточные условия существования и единственности ограниченных решений доказаны в [1].

Пусть B — банахово пространство всех комплексно-значных функций, непрерывных и ограниченных при $-\infty < x < +\infty$, наделенное нормой $\|f\| = \sup |f(t)|$.

Рассмотрим уравнение $\dddot{x} + a_1\ddot{x} + a_2\dot{x} + a_3 x = f(t)$ с вещественными положительными коэффициентами a_i $(i = 1, 2, 3)$. Известно, что его ограниченное на всей числовой оси решение допускает представление:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s) f(s)\, ds, \tag{1}$$

где $G(t)$ — функция Грина.

Введем обозначения: $b_1 = ((\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3))^{-1}$, $b_2 = ((\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3))^{-1}$, $b_3 = ((\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2))^{-1}$, где, соответственно, λ_i — корни характеристического многочлена соответствующего дифференциального уравнения. Соотношение (1) определяет интегральный оператор $K(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s) f(s)\, ds$.

Теорема. *Пусть характеристические числа λ_i вещественны, тогда справедливы следующие соотношения*:

$$\|K(f)\| = \begin{cases} \sum_{i=1}^{3} b_i/\lambda_i, & 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3, \\ b_2/\lambda_2 + b_3/\lambda_3 - b_1/\lambda_1, & \lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3, \\ 1/\lambda^3, & 0 < \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda, \end{cases}$$

$$\|\dot{K}(f)\| = \begin{cases} \sum_{i=1}^{3} b_i(2e^{\lambda_i \sigma_0} - 1), & 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3, \\ \sum_{i=2}^{3}(-2b_i e^{\lambda_i \sigma_1}) + b_1 + b_2 + b_3, & \lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3, \\ 4/(\lambda^2 e^2), & 0 < \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda, \end{cases}$$

$$\|\ddot{K}\|(f)\| = \begin{cases} \sum_{i=1}^{3} 2b_i\lambda_i(e^{\lambda_i \sigma_2} - e^{\lambda_i \sigma_3}), & 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3, \\ \sum_{i=2}^{3}(-2b_i\lambda_i e^{\lambda_i \sigma_4}) + b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3, & \lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3, \\ 2/\lambda, & 0 < \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda, \end{cases}$$

где σ_0 — корень уравнения $b_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + b_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} + b_3\lambda_3 e^{\lambda_3 t} = 0$, σ_1 — корень уравнения $b_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} + b_3\lambda_3 e^{\lambda_3 t} = 0$, σ_2, σ_3 — корни уравнения $b_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + b_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 t} + b_3\lambda_3^2 e^{\lambda_3 t} = 0$, σ_4 — корень уравнения $b_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 t} + b_3\lambda_3^2 e^{\lambda_3 t} = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Перов А. И.*, *Барамзин С. А.*, *Григорова М. Ф*, *Кириллова М. М.*, *Шерстобитова А. А.* Об ограниченных решениях дифференциальных уравнений. — Труды молодых ученных, 2004, № 2, с. 14–21.