А. Ю. Б о г д а н о в (Ульяновск, УлГУ). **Развитие прямого метода Ляпунова при исследовании неустойчивости дискретного уравнения с бесконечным запаздыванием.**

Классические теоремы прямого метода Ляпунова и их позднейшие модификации дают достаточные условия как устойчивости, так и неустойчивости положения равновесия системы, описываемой ОДУ или ФДУ. Однако практическая ценность этих теорем не равнозначна. В реальной системе далеко не любое начальное состояние может оказаться допустимым, и положение равновесия, неустойчивое в смысле Ляпунова, может оказаться устойчивым по отношению к более узкому классу практически возможных возмущений. Если в каждой окрестности положения равновесия удастся найти подмножество состояний, по отношению к которым это положение будет неустойчиво, то такой результат будет более ценным для прикладных задач. В работе, представленной данным сообщением, приводятся теоремы о неустойчивости дискретного уравнения с бесконечным запаздыванием, в которых указанное подмножество определяется при помощи функции Ляпунова и вспомогательного функционала.

Пусть B — действительное векторное пространство дискретных функций $\{\varphi\}$, отображающих $\mathbf{Z}^-$ в $\mathbf{R}^m$. Пусть в B определена такая норма $\|\cdot\|_B$, что линейное нормированное пространство $(B, \|\cdot\|_B)$ является полным пространством «с исчезающей памятью» [1]. Для дискретной функции x: $\mathbf{Z} \to \mathbf{R}^m$ определим функцию x_n: $\mathbf{Z}^- \to \mathbf{R}^m$ для произвольного фиксированного $n \in \mathbf{Z}$ по формуле $x_n(k) = x(n+k)$, $k \leqslant 0$. Рассмотрим систему уравнений

$$x(n+1) = f(n, x_n), \quad f(n, 0) \equiv 0, \tag{1}$$

где $f(n,\varphi)$: $\mathbf{Z}^+ \times B_H \to \mathbf{R}^m$ есть непрерывное по φ при каждом $n \in \mathbf{Z}^+$ отображение, ограниченное на $\mathbf{Z}^+ \times D$, где $D = \overline{B}_h$, $|f(n,\varphi)| \leqslant m(h)$ для всех $(n,\varphi) \in \mathbf{Z}^+ \times \overline{B}_h$, $0 < h < H$. Предположим также, что $f(n, x_n)$ удовлетворяет условиям предкомпактности [1].

Рассмотрим задачу о неустойчивости нулевого решения (1) в смысле Ляпунова. Пусть $V = V(n,x) \in C(\mathbf{Z}^+ \times G_H, \mathbf{R}^+)$ есть функция Ляпунова, где $G_H = \{x \in \mathbf{R}^m$: $|x| < H\}$. Ее первая разность в силу (1) есть функционал $\dot V$: $\mathbf{Z}^+ \times B_H \to \mathbf{R}$, $\dot V(n, x_n) = V(n+1, f(n,x_n)) - V(n, x(n))$. На $\mathbf{Z}^+ \times B_H$ определим непрерывный функционал W со значениями в $\mathbf{R}^+$.

О п р е д е л е н и е 1. Пара (V, W) называется *парой Ляпунова–Разумихина*, если для каждого $k > 0$, $n \geqslant k$ и такой $\varphi \in B_H$, что $\varphi_{-k} \in B_H$, функция φ ограничена на $[-k, 0]$, выполняется

$$V(n, \varphi(0)) \leqslant W(n,\varphi) \leqslant \max\{\max_{-k \leqslant m \leqslant 0} V(n+m, \varphi(m)), W(n-k, \varphi_{-k})\}, \tag{2}$$

$$\text{если} \quad 0 < V(n,\varphi(0)) = W(n,\varphi), \quad \text{то} \quad \dot V(n,\varphi) \leqslant 0. \tag{3}$$

Пусть для (1) существует пара (V, W), удовлетворяющая предположениям 1, 2, 4 [1].

О п р е д е л е н и е 2. Для функции V и функционала W обозначим $P(V,W)$ — такое подмножество из $\mathbf{Z}^+ \times B_H$, что $(n,\varphi) \in P(V,W)$, если и только если $0 < V(n,\varphi(0)) = W(n,\varphi)$.

Всюду ниже будем предполагать, что $P(V,W) \cap (\mathbf{Z}^+ \times B_\delta) \neq \varnothing$ для любого $\delta > 0$ (здесь функция $V(n,x)$ не предполагается знакоопределенной).

П р е д п о л о ж е н и е. Для каждого $k > 0$, $n \geqslant k$ и такой функции $\varphi \in B_H$, что $\varphi_{-k} \in B_H$, φ ограничена на $[-k, 0]$, выполняется $V(n,\varphi(0)) \leqslant W(n,\varphi) \leqslant \max\{\max_{-k \leqslant m \leqslant 0} V(n+m, \varphi(m)), W(n-k, \varphi_{-k})\}$; если $(n,\varphi) \in P(V,W)$, то $\dot V(n,\varphi) \geqslant 0$.

Теорема 1. *Предположим, что*: 1) *существует такое* $n_0 > 0$, *что для каждого малого* $\delta > 0$ *найдется* $\varphi_0 \in B_\delta$, $(n_0, \varphi_0) \in P(V,W)$; 2) $\dot V(n,\varphi) = U(n,\varphi) \geqslant 0$ *для* *всех* $(n, \varphi) \in P(V, W) \cap G$, *где* $G = \mathbf{Z}^+ \times B_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$; 3) *существует такая* $n_k \to +\infty$, *что для каждого компакта* $D \subset B_H$ *множество* $M(n, c_0, \widetilde{N}, D) \cap L(n, D, U^*) \cap B_\varepsilon$ *не содержит решений предельной системы* $x(n+1) = f^*(n, x_n)$ *при малых* $c_0 > 0$. *Тогда нулевое решение системы* (1) *неустойчиво.*

Теорема о неустойчивости из [2], доказанная для предкомпактного уравнения с конечным запаздыванием, когда в качестве $W(n, \varphi)$ рассматривается $\max_{-h \leqslant k \leqslant 0} V(n+k, \varphi(k))$, является частным случаем приведенного утверждения. Отметим, что в качестве начальных возмущений здесь предполагаются произвольные элементы B. При исследовании конкретных систем уравнение, неустойчивое в смысле Ляпунова, может быть устойчивым относительно более узкого класса реально допустимых возмущений. Следуя идее работы [3], которая, в свою очередь, опирается на результат [4], покажем, что существования пары (V, W) с указанными выше свойствами достаточно для получения более общего утверждения о поведении решений.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть A — некоторое подмножество $\mathbf{Z}^+ \times B_H$, такое, что $\mathbf{Z}^+ \times \{0\} \subset \overline{A}$. Нулевое решение (1) называется *вполне неустойчивым относительно множества* A, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta \in (0, \varepsilon)$ и любых таких $\varphi \in B_\delta$, $n_0 \geqslant 0$, что $(n_0, \varphi) \in A$, решение уравнения (1) $|x(n^*; n_0, \varphi)| > \varepsilon$ (или $\|x_{n^*}(n_0, \varphi)\|_B > \varepsilon$) для некоторого $n^* > n_0$.

Теорема 2. *Пусть* S — *положительное инвариантное подмножество* B_H *относительно уравнения* (1) *и* $\{0\} \in \overline{S}$. *Предположим, что существует такая пара* (V, W), *удовлетворяющая предположениям* 1–2 [1] *и условиям* (2), (3), *что*: 1) *множество* $\mathbf{Z}^+ \times S \cap P(V, W)$ *непусто*; 2) $\dot{V}(n, \varphi) = U(n, \varphi) \geqslant 0$ *для всех* $(n, \varphi) \in \mathbf{Z}^+ \times S \cap P(V, W) \cap G$ (*где* $G = \mathbf{Z}^+ \times \overline{B}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$); 3) *существует* $n_k \to +\infty$, *что для любого компакта* $D \subset B_H$ *множество* $P(V^*, W^*) \cap L(n, D, U^*) \cap G$ *не содержит решений предельного уравнения* $x(n+1) = f^*(n, x_n)$. *Тогда нулевое решение* (1) *вполне неустойчиво относительно* $\mathbf{Z}^+ \times S \cap P(V, W)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (от противного). Зафиксируем произвольное δ, $0 < \delta < \varepsilon$, и выберем φ_0, n_0: $\|\varphi_0\|_B < \delta$, $(n_0, \varphi_0) \in P(V, W) \cap (\mathbf{Z}^+ \times S)$. Предположим, что $x(n) = x(n; n_0, \varphi_0)$ — решение (1) и $|x(n)| \leqslant \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0$. Тогда множество $\{x_n(n_0, \varphi_0)\colon\ n \geqslant n_0\}$ содержится в некотором компакте $D_x \subset B_H$. Так как $(n_0, \varphi_0) \in P(V, W) \cap G$, то $0 < V(n_0, \varphi_0(0)) = W(n_0, \varphi_0)$. Кроме того, из условий теоремы следует, что $\dot{V}(n_0, \varphi_0) = \dot{V}(n_0, x_{n_0}) \geqslant 0$. Из неотрицательности $\dot{V}$ следует, что $V(n, x(n)) \geqslant V(n_0, x(n_0))$, где $n \in [n_0, \beta]$, для некоторого $\beta > n_0$, по крайней мере, $\beta = n_0 + 1$. Используя соотношение (2), получаем: $W(n_0, x_{n_0}) = V(n_0, x(n_0)) \leqslant V(n, x(n)) \leqslant W(n, x_n)$. То есть $W(n_0, x_{n_0}) \leqslant W(n, x_n)$ для $n \in [n_0, \beta]$. Поэтому $V(n, x(n)) \leqslant W(n, x_n) \leqslant \max\{\max_{n_0 - n \leqslant k \leqslant 0} V(n+k, x(n+k)), W(n_0, x_{n_0})\} = \max_{n_0 - n \leqslant k \leqslant 0} V(n+k, \varphi(k)) = V(n, x(n))$. Следовательно, $V(n, x(n)) = W(n, x_n)$ для $n \in [n_0, \beta]$ и (n, x_n) остается в множестве $P(V, W)$ при $n \in [n_0, \beta]$. Рассуждая таким образом, получаем, что

$$(n, x_n) \in P(V, W) \cap G \quad \text{при всех} \quad n \geqslant n_0, \tag{4}$$

а функция V не убывает вдоль решения $x(n; n_0, \varphi_0)$. В силу ограниченности $V(n, \varphi(0))$ на множестве $P(V, W) \cap G$, существует предел

$$\lim_{n \to +\infty} V(n, x(n; n_0, \varphi_0)) = c_0 \geqslant V(n_0, \varphi_0(0)) > 0. \tag{5}$$

Пусть $n_k \to +\infty$ — последовательность, определяемая из условий теоремы и $f(n + n_k, \varphi) \to f^*(n, \varphi)$, $U(n + n_k, \varphi) \to U^*(n, \varphi)$ равномерно по $[0, N] \times D_x$ для каждого $N \in \mathbf{N}$, $V(n + n_k, x) \to V^*(n, x)$, а $x_{n_{k_j}} \to \psi$ для некоторой $k_j \to +\infty$. Тогда $x_{n_{k_j}}(n) = x(n_{k_j} + n; n_0, \varphi_0))$, $n \geqslant 0$, сходится к решению $x^*(n; 0, \psi)$ уравнения $x(n+1) = f^*(n, x_n)$, при этом $x^*_n \in D_x$ для всех n. Из неубывания $V(n, x(n))$ и соотношений (4) и (5) следует, что для всех $n \in \mathbf{Z}^+$ выполнено $(n, x^*_n) \in P(V^*, W^*) \cap G$

и $V^*(n, x^*(n; 0, \psi)) \equiv c_0 = \text{const}$. Следовательно, $(n, x_n^*) \in P(V^*, W^*) \cap L(n, D_x, U^*) \cap G$. Заметим, что $x_n^* \in S$ для всех $n \geqslant 0$ в силу положительной инвариантности S. Полученное противоречие с условием 3) теоремы завершает доказательство.

З а м е ч а н и е 1. При проверке условия 3) множество $P(V^*, W^*) \cap L(n, D, U^*)$ можно заменить на $\{\varphi \in B\colon V^*(n+k, \varphi(k)) \equiv c_0 > 0\}$ в силу монотонности функции V вдоль решения.

З а м е ч а н и е 2. Если $\dot{V}(n, \varphi) \geqslant 0$ на множестве M: $\mathbf{Z}^+ \times S \cap P(V, W) \subset M \subset \{(n, \varphi) \in \mathbf{Z}^+ \times B_H\colon V(n, \varphi(0)) > 0\}$, то нулевое решение (1) вполне неустойчиво относительно множества $\mathbf{Z}^+ \times S \cap M$.

З а м е ч а н и е 3. Если $\dot{V}$ строго положительна на множестве $P(V, W)$ и $U^*(n, \varphi) = 0 \iff \varphi = 0$ для любого предельного функционала U^*, то условие 3) теоремы выполняется автоматически. При этом в формулировке теоремы не фигурируют предельные уравнения. Заметив, что функция V монотонно возрастает вдоль выбранного решения, можно завершить доказательство по стандартной схеме, не используя решений предельного уравнения. Полученный результат будет справедлив для более широкого класса неавтономных уравнений вида (1).

Рассмотрим общий класс допустимых пространств. Пусть $\gamma > 0-$, $g(k)$: $\mathbf{Z}^- \to (0, +\infty)$ — такая дискретная функция, что $\sum_{k=0}^{-\infty} g(k) < \infty$, $\sup_{k \leqslant 0}(g(k-N)/g(k)) \leqslant L(N)$ для некоторой функции L: $\mathbf{Z}^+ \to (0, +\infty)$. Определим $B_{g,\gamma} = \{\varphi \in B\colon \sum_{k=0}^{-\infty} g(k)|\varphi(k)|^\gamma < \infty\}$, $\|\varphi\|_{g,\gamma} = \max\{|\varphi(0)|, (\sum_{k=0}^{-\infty} g(k)|\varphi(k)|^\gamma)^{1/\gamma}\}$.

П р и м е р. Рассмотрим скалярное нелинейное уравнение

$$x(n+1) = a(n)x(n) - \sum_{k=0}^{-\infty} p(n,k)x(n+k) + x(n)\sum_{k=0}^{-\infty} q(n,k)x^2(n+k), \tag{6}$$

где функции $a(n)$, $p(n,k)$, $q(n,k)$ определены для всех $n \geqslant 0$ и ограничены равномерно по n: $2 \leqslant a(n) \leqslant a_0$, $0 < p(n,k) \leqslant p_1(k)$, $0 \leqslant q(n,k) \leqslant q_1(k)$; для любого $k \in \mathbf{Z}^-$, $n_0, n_1 \in \mathbf{Z}^+$ существует такое $n \in [n_0, n_1]$, что $q(n,k) > \delta > 0$, где δ зависит от разности $n_1 - n_0$. Будем предполагать, что функции $p_1(k)$ и $q_1(k)$ ограничены и выполняются следующие соотношения:

$$\sup_{k \leqslant 0} \frac{p_1(k-N)}{p_1(k)} \leqslant L_p(N), \quad \sup_{k \leqslant 0} \frac{q_1(k-N)}{q_1(k)} \leqslant L_q(N), \quad \lim_{N \to +\infty} L_q(N) = 0,$$

$$\sup_{k \leqslant 0} \frac{p(n, k-m-1)}{p(n-m-1, k)} + \sum_{k=-m}^{0} p(n,k) \leqslant 1 \quad \text{для всех} \quad m \geqslant 0, \quad n \geqslant m.$$

Например, $p(n,k) = 3^{(n+1)(k-1)}$, $q(n,k) = 2^k \cos^2 n$. Пусть $B = B_{p_1,1} \cap B_{q_1,2}$.

Возьмем $V(n,x) = V(x) = x^2$, $W(n,x) = \max\{\varphi^2(0), (\sum_{k=0}^{-\infty} p(n,k)|\varphi(k)|)^2\}$. Можно показать, что V и W удовлетворяют условиям предположения.

Функции, предельные к V и W, будут иметь вид $V^*(x) = x^2$, $W^*(n,\varphi) = \max\{\varphi^2(0), (\sum_{k=0}^{-\infty} p^*(n,k)|\varphi(k)|)^2\}$, где $p^*(n,k) = \lim_{j \to +\infty} p(n+n_j, k)$ для некоторой последовательности $n_j \to +\infty$ (предел не зависит от компакта $D \subset B_H$).

Для произвольного компакта $D \subset B_H$ и произвольной последовательности $n_j \to +\infty$ на множестве $P(V^*, W^*) \cap \mathbf{Z}^+ \times D$ выполняется соотношение $U^*(n,\varphi) = (a^*(n)\varphi(0) - \sum_{k=0}^{-\infty} p^*(n,k)\varphi(k) + \varphi(0)\sum_{k=0}^{-\infty} q^*(n,k)\varphi^2(k))^2 - \varphi^2(0) \geqslant \varphi^2(0)(\sum_{k=0}^{-\infty} q^*(n,k)\varphi^2(k))^2 \geqslant 0$. Здесь предельный функционал $U^*(n,\varphi)$ также не зависит от компакта $D \subset B_H$. Таким образом, для функций φ из множества $P(V^*, W^*) \cap L(D, U^*)$ должно выполняться условие $\varphi^2(0)(\sum_{k=0}^{-\infty} q^*(n,k)\varphi^2(k))^2 = 0$. Если $x^*(n)$ — решение предельного уравнения, то все функции x_n^* равномерно ограничены и содержатся в некотором компакте $D \subset B_H$, а, значит, в силу свойств функции $q(n,k)$ для $x_n^* \in P(V^*, W^*) \cap L(D, U^*)$ должно выполняться $x^*(n) \equiv 0$. Но тогда $V^*(x^*(n)) = 0$ и x^*_n не содержится в множестве $P(V^*, W^*)$. Таким образом, множество $P(V^*, W^*) \cap L(D, U^*)$ не содержит решений соответствующего предельного уравнения. Следовательно, выполнены все условия теоремы 2, и нулевое решение уравнения (6) вполне неустойчиво относительно множества $P(V, W)$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 05–01–00765.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богданов А. Ю.* Развитие метода функций Ляпунова–Разумихина для неавтономных дискретных систем с неограниченным запаздыванием. — Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Серия «Естественные науки», 2007, № 1, с. 28–39.
2. *Андреев А. С.*, *Черников С. В.* О сходимости нестационарного дискретного процесса. — В сб. трудов Пятой Международной конференции: Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов. Ульяновск: 2003, с. 6–8.
3. *Седова Н. О.* К вопросу о полной неустойчивости для дифференциальных уравнений запаздывающего типа. — Ученые записки УлГУ. Сер. «Фундаментальные проблемы математики и механики», 2001, в. 1 (10), с. 77–94.
4. *Haddock J.*, *Zhao J.* Instability for autonomous and periodic functional differential equations with finite delay. — Funkcialai Ekvacioj, 1996, v. 39, p. 553–570.