

М. Ю. Кокурин, Д. С. Герасимов (Йошкар-Ола, МарГУ). **Об уравнениях типа свертки с неполностью заданным ядром и задачах реконструктивной обработки дефокусированных изображений.**

Исследуется интегральное уравнение типа свертки

$$\int_{\mathbf{R}^2} K_\rho(x - \xi) z(\xi) d\xi = u(x), \quad x \in \mathbf{R}^2, \quad (1)$$

с ядром K_ρ : $K_\rho(x) = 0$ при $|x| > \rho$ и $K_\rho(x) = (\pi\rho^2)^{-1}$ при $|x| \leq \rho$. Уравнение (1) служит моделью формирования дефокусированного фотоизображения, при этом функция z описывает исходное, u — размытое изображение, параметр $\rho > 0$ определяет степень размытия. Необходимость априорного задания величины ρ либо визуального контроля качества улучшенного изображения [1, гл. VII] существенно ограничивает область применения известных методов реконструкции z .

В докладе представлена алгоритмическая реализация метода автоматического определения радиуса размытия ρ . Применяв преобразование Фурье к (1), получим $\tilde{K}_\rho(\omega)\tilde{z}(\omega) = \tilde{u}(\omega)$, $\omega \in \mathbf{C}^2$. Здесь $\tilde{K}_\rho(\omega) = 2(\rho|\omega|)^{-1}J_1(\rho|\omega|)$, где J_1 — функция Бесселя. Пусть $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ — положительные корни $J_1(t)$. Обозначим $N(f)$ множество нулей функции $f: \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$, запишем $N(\tilde{u}) = N(\tilde{K}_\rho) \cup N(\tilde{z})$. В сечении этих множеств вещественной плоскостью $\{\omega = (\omega_1, \omega_2): \operatorname{Im}\omega_1 = \operatorname{Im}\omega_2 = 0\}$ определим луч $\mathcal{L}_\varphi = \{\omega_1 = \alpha \cos \varphi, \omega_2 = \alpha \sin \varphi, \alpha \geq 0\}$, $\varphi \in [0, \pi)$. Имеем $N(\tilde{K}_\rho) \cap \mathcal{L}_\varphi = \bigcup_{n=1}^\infty \{(\alpha_n \cos \varphi, \alpha_n \sin \varphi)\}$, $\alpha_n = \rho^{-1}t_n$. На выбранном интервале $S \subset (0, \infty]$ изменения параметра α могут быть численно определены значения функции $s(\alpha) = |\tilde{u}(\alpha \cos \varphi, \alpha \sin \varphi)|$. В случае точного вычисления преобразования Фурье равенство $s(\alpha) = 0$ влечет $(\alpha \cos \varphi, \alpha \sin \varphi) \in N(\tilde{u})$. Ввиду потери точности, связанной с переходом к дискретному преобразованию Фурье, функция $s(\alpha)$ может не иметь корней. Вместо них предлагается использовать ярко выраженные локальные минимумы функции $s = s(\alpha)$, $\alpha \in S$. С использованием метода наименьших квадратов функция s кусочно аппроксимируется семейством полиномов и формируется множество $P^* = \{p_1^*, p_2^*, \dots\}$ точек локального минимума полученной аппроксимации. Фиксируется параметр $m \in \mathbf{N}$ и к полученному множеству применяется следующий алгоритм поиска радиуса размытия ρ :

- 1) выбирается такой отрезок $[a, b] \subset (0, \infty]$, что $\rho \in [a, b]$ (ограничений на длину интервала нет, однако ее уменьшение сокращает объем необходимых вычислений);
- 2) для каждого $p_i^* \in P^* \cap [t_1/b, t_1/a]$, $i = 1, \dots, q$, повторяются шаги 3–5;
- 3) предполагается $\alpha_1 = p_i^*$, из соотношения $\rho = t_1/\alpha_1 = t_2/\alpha_2 = \dots$ находится возможное $\rho_i = t_1/\alpha_1$ и строятся значения $\{\alpha_k = t_k/\rho_i\}_{k=2}^m$;
- 4) для каждого α_k отыскивается ближайшая точка $p_k^* \in P^*$, $p_1^* = \alpha_1$;
- 5) вычисляется значение невязки $\Delta_i = \sum_{k=1}^m |\alpha_k - p_k^*|^2$, $i = 1, \dots, q$;
- 6) выбирается $\rho = \rho_i$, для которого невязка минимальна, $\Delta = \min_{i=1, \dots, q} \Delta_i$.

Представлены результаты экспериментов с программной системой, созданной в среде MatLab с использованием пакета Image Processing Toolbox. В ходе экспериментов для подавления погрешностей дополнительно применялось усреднение функции $s(\alpha)$ на нескольких лучах $\mathcal{L}_\varphi$ для различных φ .

Работа поддержана РФФИ, проект № 06-01-00282a.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакушинский А. Б., Гончарский А. В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1989.