

И. И. Г о л и ч е в (Уфа, ИМсВЦ РАН). **Итерационный метод решения уравнений Навье–Стокса как задачи оптимального управления.**

Предлагаемый подход состоит из двух этапов. На первом этапе построен модифицированный итерационный процесс Ньютона, сходящийся с любого начального приближения, где на каждой итерации решаются линейные уравнения Стокса. При построении итерационного процесса используются априорные оценки решения. На втором этапе линеаризованные задачи решаются как задачи оптимального управления с помощью итеративной регуляризации метода проекции градиента.

1. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ и $Q = \Omega \times [0, T]$. Рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \vartheta \Delta u + \sum_{i=1}^n u_i u_{x_i} - f - \text{grad } p = 0 \quad (\vartheta > 0), \quad (1)$$

$$\text{div } u = 0, \quad (2)$$

$$u(x, t)|_S = 0, \quad u(x, 0) = h \quad \text{на } \Omega, \quad (3)$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Введем следующие обозначения: $W = \{v \in [\dot{W}_2^1(\Omega)]^n: \text{div } v = 0\}$, H — замыкание W в $[L_2(\Omega)]^n = L_2^n(\Omega)$, $\|u\|_H = \|u\|_{L_2^n(\Omega)}$, $\|u\|_{H,a,b}^2 = \int_a^b \|u\|_H^2 dt$, $\|u_x\|_H^2 = \sum_{i=1}^n \|u_{i,x}\|^2 = \sum_{i,k=1}^n \|u_{i,x_k}\|^2$, $\|u_x\|_{H,a,b} = \int_a^b \|u_x\|_H^2 dt$, $\bar{Z}_a^b = \bar{Z}(Q_a^b) = W_2^1(a, b; W \cap [W_2^2(\Omega)]^n) \cap L_\infty(0, T; W)$, $\bar{Z} = \bar{Z}_0^T$, $\|u\|_{\bar{Z}_a^b} = \text{vrai max}_{t \in [a,b]} \|u_x(x, t)\|_H + \|\Delta u\|_{H,a,b} + \|u_t\|_{H,a,b}$, $\|u\|_{\bar{Z}_a^b} = \text{vrai max}_{t \in [a,b]} \|u_x(x, t)\|_H + \|\Delta u\|_{H,a,b}$.

Методом последовательных приближений будем искать сильное решение $\{u, p\} \in \bar{Z} \times W_2^{1,0}(Q)$ задачи (1)–(3) в предположении, что оно существует и известна априорная оценка

$$\|u\|_{\bar{Z}_0^{t_0}} \leq M_0(t_0) \leq M_0 < \infty \quad (4)$$

при любом $t_0 \in (0, T]$. В этом случае известна также оценка

$$\|u_x(x, t)\| \leq N_0(t) \leq N_0 < \infty, \quad t \in (0, T]. \quad (5)$$

Обозначим $\alpha_R(a, b, u) = \min\{1, R\|u\|_{\bar{Z}_a^b}^{-1}\}$, $\alpha_R(t, u) = \min\{1, R(t)\|u\|_H^{-1}\}$, $P_1 u = \alpha_R(a, b, u)u$, $P_2 u = \alpha_{R(t)}(t, u)u$.

Пусть $P_i u_k$ есть k -я координата вектора $P_i u$ ($i = 1, 2$), $B(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i v_{x_i}$, $R'(u)v = B(u, v) + B(v, u)$.

Будем искать решение на интервале $[0, t_0]$, $t_0 \leq T$, с помощью следующего итерационного процесса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{k+1}}{\partial t} - \vartheta \Delta u^{k+1} + \alpha_M(0, t_0, u^k) R'(u^k) u^{k+1} + \text{grad } p^{k+1} \\ = f + \alpha_M(0, t_0, u^k) R'(u^k) u^k - \alpha_N(t, u^k) B(u^k, u^k), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{div } u^{k+1} = 0, \quad (7)$$

$$u^{k+1}(x, 0) = h, \quad u^{k+1}|_S = 0. \quad (8)$$

Теорема. Пусть область Ω ограничена, $\partial\Omega \subseteq C^2$, $h \in W$, $f \in L_2(0, T; H)$ и существует решение $u \in \bar{Z}$ задачи (1)–(3). Тогда последовательности $\{u^k\}_{k=0}^\infty$, $\{p^k\}_{k=0}^\infty$, определенные итерационным процессом (6)–(8), сходятся в пространствах $\bar{Z}_0^{t_0}$, $W_2^{1,0}(Q_0^{t_0})$ при любых $u^0 \subset \bar{Z}$, $M \geq M_0(0, t_0)$, $N(t) \geq N_0(t)$, $t_0 \in (0, T]$, u по любому $q \in (0, 1)$ найдется такое $C(q)$, что

$$\|u^k - u\|_{\bar{Z}_0} t_0 \leq C(q) q^k \|u - u^0\|_{\bar{Z}_0} t_0,$$

$$\|p^k - p\|_{W_2^{1,0}(Q_0^{t_0})} \leq C(q)q^{k+1}\|p - p^1\|_{W_2^{1,0}(Q_0^{t_0})}.$$

З а м е ч а н и е 1. Если $M > M_0(0, t_0)$, $N(t) \geq N_0(t) + \delta$ ($\delta > 0$), то можно показать, что сходимость итерационного процесса (6)–(8) квадратическая, поскольку при приближении итераций к искомому решению итерационный процесс переходит в обычный итерационный процесс Ньютона.

З а м е ч а н и е 2. Оценка (4) при $n = 2$ и достаточной гладкости данных задачи находится на всем интервале $[0, T]$. Если $n = 3$, то оценка (4) получена на интервале $[t_0, t_0 + h]$, где h оценивается через величины $\|u_x(x, t_0)\|_H$, $\max_{t \in [t_0, t_0 + h]} \|f(x, t)\|_H$.

З а м е ч а н и е 3. Ранее [4] автором была доказана сходимость итерационного процесса вида (6)–(8), в котором $R'(u^k) = 0$. Преимуществом предлагаемого метода является его более быстрая сходимость, в особенности при малом параметре v .

2. Линеаризованную задачу (6)–(8) будем рассматривать как задачу оптимального управления (индекс $k + 1$ опускаем), в которой $\text{grad } p^{k+1} = v$ рассматривается как управление, а минимизируется квадрат дивергенции. То есть рассматривается задача

$$J(v) = \|\text{div } U_v\|_H \rightarrow \inf_{v \in H^\perp}, \quad (9)$$

где u_v — обобщенное решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \vartheta \Delta u + \alpha_M(0, t_0, u^k)R'(u^k)u + v = F(u^k), \quad (10)$$

$$u(x, 0) = h, \quad u|_s = 0. \quad (11)$$

Найден градиент функционала $J(v)$, показано, что градиент удовлетворяет условию Липшица, получена оценка константы Липшица, а также оператор проектирования на пространство $H^\perp$ ($H^\perp$ — ортогональное дополнение H в $L_2(Q)$). Для решения задачи (9)–(11) используется и обосновывается итеративная регуляризация метода проекции градиента [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970, 288 с.
2. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981, 408 с.
3. *Белоцерковский О. М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Физматлит, 1994, 448 с.
4. *Голицев И. И.* Решение некоторых задач для параболических уравнений методом последовательных приближений. Уфа.: БНЦ Уро АН СССР, 1989, 172 с.
5. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.