

А. Ф. Н и к о л а е в (Нижний Новгород, ЗАО «Интел А/О»). **Статистические свойства динамической системы, управляемой процессом Орнштейна–Уленбека.**

Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, P)$, удовлетворяющем обычным условиям [1], задан процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$, допускающий стохастический дифференциал вида $dX_t = -\lambda X_t dt + \sigma dW_t$, в котором константы λ и σ — положительные числа, Винеровский процесс $W = (W_t)_{t \geq 0}$ не зависит от стартового значения $X_0 \sim N(0, \sigma^2/(2\lambda))$. Фильтрация порождается процессом X : $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$, $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s; s \leq t\}$.

Рассмотрим динамическую систему S , состоящую из двух блоков B_1 и B_2 . Блок B_1 , который в каждый момент времени $t \geq 0$ может быть описан в виде гармонической функции, модулируется процессом X :

$$z_t = \sin \left(2\pi \int_0^t (f_1 + kX_u) du \right)$$

с центральной частотой $f_1 > 0$ и уровнем модуляции $k > 0$. Свяжем с системой B_1 последовательность случайных моментов времени $\{\tau_i\}_{i \geq 0}$, определяемую для всех $i \geq 1$: $\tau_{i+1} = \tau_i + \eta_{i+1}$, $\tau_0 = 0$ и $\eta_{i+1} = \min \{x: x \geq 0, \int_{\tau_i}^x (f_1 + kX_u) du \geq 1\}$. Обозначим $T_1 = 1/f_1$. Блок B_2 генерирует гармонический сигнал с периодом $T_2 = 1/f_2$, $f_2 > 0$:

$$y_t = \sum_{i \geq 0} I \{t \in [\alpha_i, \alpha_i + dcT_2)\}$$

с индикаторной функцией $I \{t \in [\cdot, \cdot)\}$ и последовательностью моментов $\{\alpha_i\}_{i \geq 0}$, $\alpha_{i+1} = \alpha_i + T_2$, $\alpha_0 = 0$. Параметр $dc \in (0, 1)$ определяет рабочий цикл блока B_2 . Выходом системы S является бинарная последовательность $b = \{b_i\}_{i \geq 1}$ с $b_i = y(\tau_i)$.

Оценим (приблизительно) статистические параметры системы S в частном (и очень важном для приложений) случае, когда значения частот велики, причем $f_1 \ll f_2$, $k \in (k_1, k_2)$, $\sigma^2/(2\lambda) \in (d_1, d_2)$, где $\min \{k_1, d_1\} \geq \varepsilon_1 > 0$ и $\max \{k_2, d_2\} \leq \varepsilon_2 < \infty$.

Пусть $\varphi_{a, \delta^2}(x)$ — плотность нормального распределения с математическим ожиданием a и дисперсией δ^2 .

Теорема 1. *Условное распределение $\mathbf{P} \{\eta_n \leq x | \mathcal{F}_{\tau_{n-1}}\}$ аппроксимируется функцией*

$$M(x) = \begin{cases} \frac{1}{kT_1} \int_0^x \varphi_{a_{n-1}, \delta^2} \left(\frac{T_1 - y}{kT_1} \right) dy, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

причем $\mathbf{E}(\eta_n | \mathcal{F}_{\tau_{n-1}}) = T_1 - kT_1 a_{n-1}$ и $\mathbf{D}(\eta_n | \mathcal{F}_{\tau_{n-1}}) = k^2 T_1^2 \delta^2$, где $a_n = X_{\tau_n} (1 - e^{-\lambda T_1}) / \lambda$ и $\delta^2 = (\lambda T_1 + 2e^{-\lambda T} - e^{-2\lambda T} / 2 - 3/2) \sigma^2 / \lambda^3$.

Условное распределение $\mathbf{P} \{\tau_n \leq x | \mathcal{F}_{\tau_{n-1}}\}$ аппроксимируется функцией $M(x - \tau_{n-1})$, при этом условные моменты случайной величины τ_n допускают представление $\mathbf{E}(\tau_n | \mathcal{F}_{\tau_{n-1}}) = \tau_{n-1} + T_1 - kT_1 a_{n-1}$ и $\mathbf{D}(\tau_n | \mathcal{F}_{\tau_{n-1}}) = kT_1^2 \delta^2$.

Теорема 2. *Для достаточно малых значений T_2 выполнено $\mathbf{P} \{b_i = 1\} = dc$ и $\mathbf{P} \{b_i = 1, b_{i+1} = 1\} = dc^2$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жакоб Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1, 2. М.: Физматлит, 1994.