Е. Н. Огородников, Н. С. Яшагин (Самара, СамГТУ). **Дробные математические модели вязко-упругого тела и проблемы параметрической идентификации.**

Исследования в области наследственной теории ползучести, берущие свое начало с работ Больцмана и Вольтерра, убеждают в том, что ядра релаксации (ползучести) для целого ряда физических сред являются ядрами абелевского типа, а основные соотношения между напряжениями и деформациями выражаются через дробные интегралы и производные Римана–Лиувилля [1]. Изучение поведения вязко-упругого тела в динамике при наличии воздействий, носящих периодический характер, представляет огромный интерес в связи с проблемой долговечности элементов конструкций. Постановка эксперимента в динамике позволяет более точно идентифицировать константы математических моделей, применяемых для описания тех или иных реальных физических объектов и сред.

В работе, представленной данным сообщением, рассматриваются дробные аналоги динамических моделей Фойхта, Максвелла, Кельвина, Бюргера. В частности, хорошо известно [2], что при моделировании эластомеров и стекловидных эмалей может быть использован дробный аналог модели Кельвина:

$$\sigma + bD_{0t}^{\beta}\sigma = E_0\varepsilon + E_1 D_{0t}^{\alpha}\varepsilon,$$

где b, E_0, E_1, β и α — известные константы; D_{0t}^{β} и D_{0t}^{α} — дробные производные Римана–Лиувилля порядка β и α соответственно, причем $0 < \alpha,\ \beta < 1$.

Частным случаем этой модели является реологическое уравнение состояния Скотт–Блэра

$$\sigma = E_1 D_{0t}^{\alpha}\varepsilon, \qquad \alpha \in [0,\ 1].$$

Несмотря на свою простоту эта модель достаточно содержательна, поскольку при граничных значениях α соблюдаются классические законы Гука и Ньютона.

Для одномерной динамической модели с вязко-упругим элементом Скотт–Блэра

$$\ddot{x} + \omega^{\alpha} D_{0t}^{\varepsilon} x = f(t),$$

где $x = x(t)$ — координата; $f(t)$ — заданное возмущение; α, ε и $\omega > 0$ — числовые параметры, причем $\varepsilon \in [0,\ 1]$ найдены в явном виде в терминах некоторых специальных функций решения задачи Коши при определенных периодических или импульсных воздействиях на систему. В частности, при $f(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < t_0, \\ 0, & t > t_0. \end{cases}$ решение задачи Коши с начальными данными $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ имеет следующий вид:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 \cos_{\alpha}(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin_{\alpha}(\omega t) + At^2 E_{\alpha}[-(\omega t)^{\alpha}; 3], & 0 < t < t_0; \\ x_1 \cos_{\alpha}[\omega(t - t_0)] + \frac{\dot{x}_1}{\omega}\sin_{\alpha}[\omega(t - t_0)], & t > t_0, \end{cases}$$

где $E_{\alpha}(z;\beta)$, $\sin_{\alpha}(z)$ и $\cos_{\alpha}(z)$ — функция Миттаг–Леффлера и обобщенные синус и косинус соответственно [1], а значения x_1 и $\dot{x}_1$ вычисляются по формулам:

$$x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\omega t_0)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)}\left(x_0 + \frac{\dot{x}_0}{\alpha k + 1}t_0 + \frac{A}{(\alpha k + 1)(\alpha k + 2)}t_0^2\right),$$

$$\dot{x}_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\omega t_0)^{\alpha k - 1}\omega}{\Gamma(\alpha k)}\left(x_0 + \frac{\dot{x}_0}{\alpha k}t_0 + \frac{A}{\alpha k + 1}t_0^2\right).$$

Найденные в работе точные решения дифференциальных уравнений с дробными производными служат основой для решения задачи параметрической идентификации [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его приложения. М. Физматлит, 2003. 272 с.
2. *Нахушев А. М.* Математические модели вязкоупругого тела. — Известия вузов. Сев.–Кавк. регион, естественные науки. 2000, № 3, с. 107–109.
3. *Зотеев В. Е.* Разработка и исследование линейных дискретных моделей колебаний диссипативных систем. Вестник Самарского гос. техн. ун-та, сер. физ.-матем. науки, 1999, № 7, с. 170–177.