

И. Ю. Б а т у х т и н а (Чита, ЧитГУ). Об одном ограничительном неравенстве теории приближения.

При решении практических задач, как правило, используются функции, полученные посредством аппроксимации экспериментальных данных. При этом полученные функции могут не удовлетворять тем или иным необходимым условиям (непрерывности, гладкости и т. д.). Поэтому возникают задачи, связанные с приближением полученных функций функциями с заданными свойствами. Одной из указанных задач является задача получения оценок вида $\|L_n(f(t), x) - f(x)\| \leq \alpha_n \rightarrow 0$, где $f(t)$ — приближаемая функция; $L_n: C(Q) \rightarrow P_n$ — приближающая последовательность линейных положительных операторов, для которых выполнено условие $L_n(1, x) = 1$; $x, t \in Q$, $Q = [0, 1]^r$, $r \in \mathbf{N}$, $P_n \subset C(Q)$ — линейное n -мерное подпространство. Величина α_n зависит от характеристик функции и от тех или иных характеристик аппроксимирующих операторов. Среди последних мы особо выделим $d(L_n) = \|L_n(|t - x|^2, x)\|$. Для случая $f(t) \in \text{Lip}_M 1$ (т. е. при $t^1, t^2 \in Q$ выполняется $|f(t^1) - f(t^2)| \leq M|t^1 - t^2|$) известна оценка $\|L_n(f(t), x) - f(x)\| \leq M\sqrt{d(L_n)}$, при этом для $r = 1$ получено неравенство $d(L_n) \geq 0,25 n^{-2}$ [1].

В данном сообщении рассмотрен случай $n \geq 2$. Доказано, что если существует множество, состоящее из $n + 1$ открытых и попарно не пересекающихся шаров диаметра a с центрами, принадлежащими Q , то для линейных положительных операторов $L_n: C(Q) \rightarrow P_n$ выполняется ограничительное неравенство

$$d(L_n) \geq 0,25 a^2. \quad (1)$$

Отсюда следует, что получение оценки величины $d(L_n)$ сводится к задаче подбора множества из $n + 1$ шаров. При этом оценка будет тем сильнее, чем больше диаметр шаров a . Для того чтобы использовать формулу (1) при каком-либо r , надо найти возможно более плотную решетчатую упаковку пространства $\mathbf{R}^r$ и подобрать a таким образом, чтобы в $[0, 1]^r$ входило не менее $n + 1$ центров шаров упаковки.

Теорема. Пусть $L_n: C(Q) \rightarrow P_n$ — последовательность линейных положительных операторов, тогда для величины $d(L_n) = \|L_n(|t - x|^2, x)\|$ выполняется оценка $d(L_n) \geq (r + 1)^{-1/r} n^{-2/r} / 2 + o(n^{-2/r})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виденский В. С. Линейные положительные операторы конечного ранга. Л.: Изд-во ЛГПИ, 1985, 68 с.