

Е. М. Б о г а т о в (Старый Оскол, СТИ МИСиС). **О приближенном вычислении собственных частот колебаний кубооктаэдрической решетки стержней.**

Работа, представленная данным сообщением, является продолжением исследований, проведенных в [1].

Рассмотрим прямоугольную пространственную решетку G_h жестко сочлененных однородных стержней, нагруженных массой m_h в местах стыковки. Каждая ячейка решетки имеет вид «кубооктаэдра» Ω (особого архимедова многогранника, получаемого из куба путем отсечения треугольных пирамид [2]) с ребрами $h_i = h k_i$ ($i = 1, 2, 3$), k_i — фиксированные числа. Стержни располагаются по диагоналям 6-угольных сечений Ω , проходящих через его центр, и вдоль двух «главных» диагоналей Ω .

Математическая модель собственных колебаний свободно опертой решетки G_h задается (см. [1]) уравнениями:

$$D_h u^{(4)} = \lambda \rho_h u \quad \text{на стержнях,} \quad (1)$$

$$D_h \sum_{i=1}^{12} u_i'''(a) = \lambda m_h u_i(a), \quad \sum_{i=1}^{12} u_i'(a) = 0 \quad \text{во внутренних узлах,} \quad (2)$$

$$u_j(a) = u_j''(a) = 0 \quad \text{в местах закрепления.} \quad (3)$$

Здесь D_h — изгибная жесткость стержней, ρ_h — плотность распределения массы на стержнях, m_h — масса грузов в узлах; отношение массы в узле к массе ребра постоянно; также постоянно отношение $D_h/\rho_h = \varkappa$; производная берется по направлению «от узла».

На начальном этапе решения совокупности задач (1)–(3) с учетом непрерывности моментов и перемещений в узлах мы приходим, следуя [3], к матричной системе относительно двух (неопределенных) коэффициентов B и C фундаментальной системы решений уравнения (1):

$$\Phi_1(I, T_i, \omega, h)B = C, \quad \Phi_2(I, T_i, \omega, h)C = B.$$

Здесь $\omega^4 = \lambda/\varkappa$, $i = 1, 2, 3$; Φ_j — операторы, линейные относительно первых трех своих аргументов, I — единичный оператор. Операторы T_i действуют на трехмерный массив U следующим образом: $T_1 U = u_{j_1+2, j_2, j_3} - 2u_{j_1, j_2, j_3} + u_{j_1-2, j_2, j_3}$, $T_2 U = u_{j_1, j_2+2, j_3} - 2u_{j_1, j_2, j_3} + u_{j_1, j_2-2, j_3}$, $T_3 U = u_{j_1+1, j_2+1, j_3+1} + u_{j_1-1, j_2-1, j_3-1} + u_{j_1-1, j_2-1, j_3+1} + u_{j_1+1, j_2+1, j_3-1} + u_{j_1+1, j_2-1, j_3-1} + u_{j_1+1, j_2-1, j_3+1} + u_{j_1-1, j_2+1, j_3-1}$. Из них можно составить конечно-разностный аналог 3-мерного оператора Лапласа Δ на неравномерной прямоугольной сетке:

$$\Delta U = \frac{1}{4h_3^2} T_3 U + \left(\frac{1}{4h_2^2} - \frac{1}{4h_3^2} \right) T_2 U + \left(\frac{1}{4h_1^2} - \frac{1}{4h_3^2} \right) T_1 U,$$

для которого известна формула собственных значений [2].

Далее, следуя [4], нетрудно получить выражение для собственных значений оператора $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$, т.е. задачи (1)–(3). При этом для малых h она не будет включать в себя зависимость от характерного размера ячейки периодичности решетки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 07–01–00299, 06–08–96312.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богатов Е. М.* Об аппроксимации спектра частот собственных колебаний треугольной решетки стержней. — Ж. вычисл. матем. матем. физ., 2005, т. 45, № 8, с. 1400–1407.
2. *Быстрицкий М. Е.* Різницеві схеми на неортогональних шаблонах для рівняння гіперболічного типу. — Дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. Київ, 1999. <http://www.imath.kiev.ua/bystr>.
3. *Nicase S., Penkin O.* Relations between the lower frequency spectrum of plates and networks of beams. — Math. Meth. Appl. Sci., 2000, v. 23, p. 1389–1399.
4. *Богатов Е. М., Чопчиян А. С.* О приближенном вычислении собственных частот колебаний треугольной решетки стержней. — В сб.: Труды международной научно-практической конференции «Образование, наука, производство и управление». Старый Оскол: ООО «ТНТ», 2006, т. 4, с. 278–285.