**И. Ю. П о т о ц к а я** (Санкт-Петербург, СПбГУ). **Управление по «расходу» в задачах экологического равновесия.**

Работа, представленная данным сообщением, является попыткой распространить методы, используемые для построения оптимального управления механическими системами, на управляемые математические модели экологии. Характерная особенность экосистем как объектов управления состоит в том, что, как правило, допустимыми являются лишь однонаправленные входные воздействия [I]. Такое ограничение учитывается при выборе вида управляющей функции.

Наиболее простым способом обеспечить устойчивость биологического объекта является постоянное поддержание системы около положения равновесия. Для таких задач естественна оптимизация по расходу. Возмущающие факторы время от времени отклоняют эту систему недопустимо далеко от положения равновесия и требуется каждый раз гасить эти отклонения, расходуя на это ресурсы, запасы которых ограничены. Пока отклонения от положения равновесия малы, ее управляемое движение можно моделировать автономными линейными дифференциальными уравнениями с управлением. В работе предлагаются постановка и метод построения оптимального управления для этого класса задач.

Рассмотрим систему, описываемую задачей Коши [2]:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + DU(t), \qquad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x(t) = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $x_0(t) \in \mathbf{R}^n$, $U(t) = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbf{R}^m$, $A$ — постоянная матрица размерности $n \times n$, имеющая пару некратных комплексных собственных значений $l \pm pi$, $D = \{d_{jk}\}$ — постоянная прямоугольная матрица размерности $n \times m$, а компоненты $u_k$ управления $U(t)$ предполагаются кусочно-постоянными однонаправленными функциями времени с конечным числом точек переключения, взятыми в одном из следующих видов:

$$u_k(t) = h_k \sum_{i=1}^{2r_k} (-1)^{i+1} H(t - t_i^k), \tag{2}$$

$$u_k(t) = h_k \sum_{i=1}^{2q_k} (-1)^{i} H(t - \widetilde{t}_i^k). \tag{3}$$

Слагаемые в (2) представляют положительные ступени, число которых равно $r_k$. Такой вид управления используется при добавлении в систему каких-либо веществ (субстратов, удобрений и т.п.), способствующих росту популяции. Управление в виде (3), напротив, применяется в случае изъятия из системы каких-либо объемов (отбор или отлов особей из популяции и т. п.). Слагаемые в (3) — ступени отрицательные, их число равно $q_k$. Величины $t_i^k, \widetilde{t}_i^k \in [0, T]$ — точки переключения управления, отвечающие соответственно видам (2) и (3), причем $T$ — последняя точка переключения. Коэффициенты $h_k$ постоянны, $H(t)$ — функция Хевисайда.

При таком управлении решение $x(t)$ задачи (1) является линейной комбинацией частотных компонент $x(\lambda, t) = (x_1(\lambda, t), \ldots, x_n(\lambda, t))$, отвечающих тем или иным собственным значениям $\lambda$ матрицы $A$. Допустимым считается управление $U$ вида (2) (или (3)), которое в конечный момент $T$ обращает в нуль частотную компоненту решения, соответствующую вышеупомянутым собственным числам $l \pm pi$. Обозначая эту компоненту символом $\widetilde{x}(\lambda, t) = (x(l + pi, t), x(l - pi, t))$, запишем это условие: $\widetilde{x}(T) = 0$.

В качестве оптимизируемого функционала рассматривается величина

$$J = \sum_{k=1}^{m} \int_0^T |u_k(t)|\, dt, \tag{4}$$

которая называется *функционалом расхода* или просто «расходом».

Постановка задачи следующая: при заданных $h_k$, $r_k$ (или $q_k$) для всех $k = 1, \ldots, m$ найти точки переключения $t_i^k$ (или $\widetilde{t}_i^k$) допустимого управления (включая и точку $T$), удовлетворяющие необходимым условиям экстремума функционала расхода (4).

Результаты решения поставленной задачи представлены в виде теоремы.

**Теорема.** *Пусть управляемое движение определяется задачей* (1), *а* $l \pm pi$ — *комплексные некратные собственные значения матрицы* $A$. *Тогда, если допустимое управление* (2) (*или* (3)) *обращает в нуль величину* $\widetilde{x}(T)$, *то его точки переключения* $t_i^k$ (*или* $\widetilde{t}_i^k$)), *соответствующие необходимым условиям экстремума функционала* (4), *определяются следующими формулами*:

$$\tau_i^k = pt_i^k + \varphi_k, \quad [\widetilde{\tau}_i^k = p\widetilde{t}_i^k + \varphi_k], \tag{5}$$

$$B_k = e^{-\nu\tau_i^k} \sin\tau_i^k, \quad [-B_k = e^{-\nu\widetilde{\tau}_i^k} \sin\widetilde{\tau}_i^k], \qquad \nu = l/p, \tag{6}$$

$$\sin\varphi_k = -(a + \beta b)\alpha^{-1}\gamma_k^{-1}, \quad [\sin\varphi_k = -(a + \beta b)\alpha^{-1}\gamma_k^{-1}], \tag{7}$$

$$\Lambda B_k = S_k, \quad S_k = e^{-\nu\varphi_k}\alpha^{-1}\gamma_k^{-1}, \quad [S_k = e^{-\nu\varphi_k}\alpha^{-1}\gamma_k^{-1}], \tag{8}$$

$$K_1 = y'_{1,0} - (p - \beta l)(l^2 + p^2)^{-1}\alpha^{-1}\sum_{k=1}^{n} e^{\nu\varphi_k} Q_k\gamma_k = 0, \tag{9}$$

$$\left[K_1 = y'_{1,0} + (p - \beta l)(l^2 + p^2)^{-1}\alpha^{-1}\sum_{k=1}^{n} e^{\nu\varphi_k} \widetilde{Q}_k\gamma_k = 0\right].$$

*Здесь приняты следующие обозначения*: $c'_{1,k}$, $c^*_{1,k}$ — *соответственно коэффициенты при вещественной и мнимой частях элемента* $c_{1,k}$ *матрицы* $C$, *приводящей исходную матрицу* $A$ *к ее жордановой форме*; $\Lambda$ — *множитель Лагранжа*; $y'_{1,0}$, $y^*_{1,0}$ — *соответственно коэффициенты при вещественной и мнимой частях элемента* $y_{1,0} = \sum_{k=1}^{n} c_{1,k}x_k(0)$; $\alpha = (1 + \beta^2)^{1/2}$, $\beta = (y^*_{1,0}p - y'_{1,0}l)(y^*_{1,0}l + y'_{1,0}p)^{-1}$,

$$Q_k = h_k \sum_{i=1}^{2r_k}(-1)^{i+1}H(\tau - \tau_i^k)e^{-\nu\tau_i^k}\cos\tau_i^k, \quad \left[\widetilde{Q}_k = h_k \sum_{i=1}^{2q_k}(-1)^{i}H(\tau - \widetilde{\tau}_i^k)e^{-\nu\widetilde{\tau}_i^k}\cos\widetilde{\tau}_i^k\right],$$

$$\sum_{j=1}^{n} c'_{1,j}d_{j,k} = a, \quad \sum_{j=1}^{n} c^*_{1,j}d_{j,k} = b, \quad \gamma_k = (a^2 + b^2)^{1/2}.$$

З а м е ч а н и е 1. В квадратные скобки заключены формулы, полученные для управления вида (3).

З а м е ч а н и е 2. Из уравнений (6) и (9) можно численно найти $B_k$ и все значения $\tau_i^k$ (или $\widetilde{\tau}_i^k$) и, зная их, по формулам (7), (5), (8) получить искомые значения $t - i^k$ (или $\widetilde{t}_i^k$) и $\Lambda$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Заславский Б. Г.*, *Полуэктов Р. А.* Управление экологическими системами. М.: Наука, 1988, 296 с.
2. *Бабаджанянц Л. К.*, *Потоцкая И. Ю.* Управление по критерию расхода в механических системах. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003, 137 с.