

В.В.Бухвалова, А.С.Рогульская (Санкт-Петербург, СПбГУ).
Расширение области применимости методов ГП.

Геометрическое программирование — сравнительно новый подход к решению задач оптимизации. В 1961 г. Зенер опубликовал статью [19], в которой привел примеры задач технического проектирования, которые можно сформулировать как задачи оптимизации обобщенных полиномов, и доказал, что оптимальное решение этих задач является решением специальной системы линейных уравнений. В 1967 г. Даффин, Питерсон и Зенер опубликовали монографию [10], в которой впервые ввели термин *геометрическое программирование* (ГП) для обозначения специального класса задач нелинейной оптимизации. Введение этого термина обусловлено тем, что в ранних исследованиях по ГП широко использовались геометрическое неравенство Коши и его обобщения. Все имеющиеся на настоящий момент подходы к решению задач ГП базируются на теории двойственности, которая впервые была описана в работе Даффина и Питерсона [8].

В классической постановке *прямая задача* ГП с ограничениями (задача А) имеет вид: найти $\min g_0(x)$ при ограничениях $g_k(x) \leq 1$, $k = 1, \dots, p$, $x_j > 0$, $j = 1, \dots, m$, где $g_k(x) = \sum_{i \in [k]} c_i \prod_{j=1}^m x_j^{a_{ij}}$, $k = 0, \dots, p$, $c_i > 0$.

Функции g_k ($k = 0, \dots, p$) — это обобщенные полиномы, состоящие из суммы одночленов из индексного множества $[k]$. Каждый одночлен внутри полинома является произведением строго положительного коэффициента c_i и переменных x_j с показателями степени a_{ij} . Эти показатели степени (в отличие от обычного полинома) могут быть любыми вещественными числами. Такие полиномы называются *позиномами*. Область определения позинома, поскольку возможен дробный и/или отрицательный показатель, ограничена строго положительными вещественными числами.

Обозначим n общее число одночленов, входящих в $p+1$ позином. Тогда индексное множество $I = [1, \dots, n]$ нумерует их последовательно так, что первый элемент позинома 0 имеет номер 1, а последний элемент позинома p — номер n . Будем обозначать $[k]$ индексное подмножество, соответствующее позиному k :

$$I = [0] \cup [1] \cup \dots \cup [p], \quad [k] \cap [l] = \emptyset, \quad k \neq l.$$

Двойственная задача к задаче А (задача В) имеет вид: найти $\max v(l, d) = (\prod_{i=1}^n (c_i/d_i)^{d_i}) (\prod_{k=0}^p l_k^{l_k})$ при ограничениях $\sum_{i \in [k]} d_i = l_k$, $k = 0, \dots, p$, $l_0 = 1$ (нормальность), $\sum_{i=1}^n d_i a_{ij} = 0$, $j = 1, \dots, m$ (ортогональность), $d_i, l_k \geq 0$, $k = 0, \dots, p$, $i = 1, \dots, n$.

Методы решения задач ГП являются либо прямыми — непосредственно решающими нелинейную прямую задачу А, либо двойственными — решающими эквивалентную двойственную задачу В. Заметим, что сначала были разработаны именно двойственные методы. Первым опубликованным алгоритмом ГП был двойственный метод Франка. Блау и Уальд разработали метод, который использует необходимые условия Куна–Таккера и достаточные условия оптимальности для двойственной позиномиальной задачи. Подобный подход применен у Рижкаерта и Мартенса.

Другой класс двойственных методов использует линейность ограничений в двойственной задаче. Таким образом, двойственная задача может быть переформулирована так, что число переменных будет равно размерности множества всех решений в линейных ограничениях. Эта переформулировка называется *редуцированной* двойственной задачей, она была впервые изучена Даффином, Питерсоном и Зенером в [10]. Темплмен и др., а также Брэдли исследовали этот подход. Джефферсон развивал модифицированный алгоритм Ньютона для решения редуцированной двойственной задачи. Динкель, Коченбергер и МакКарл описывали модифицированный алгоритм Ньютона–Раффсона для редуцированной двойственной задачи. В двойственных методах часто используется линеаризация, впервые описанная Даффином в [6].

Были разработаны также и прямые методы. Реклейтис и Уальд использовали алгоритм Уальда и Бейтлера для выпуклой формы прямой задачи. Гочет и Смирс создали алгоритм построения отсекающей плоскости, который решал переопределенную задачу геометрического программирования как выпуклую, решая последовательность линейных задач. Динкель, Эллиотт и Коченбергер исследовали четыре различных подхода к методу отсекающей плоскости для решения непосредственно прямой задачи ГП. Эккер и Зораки использовали тот факт (установленный Даффинном и Питерсоном [9]), что позиномиальную задачу можно свести к задаче, в которой каждый позином содержит не более, чем два одночлена, и развили метод, который аппроксимирует прямую задачу ГП с заданной степенью точности задачей линейного программирования.

Методы классического ГП позволяют решить широкий класс задач технического проектирования, но имеется много других задач оптимизации, достаточно точные модели которых могут быть построены только при помощи алгебраических функций более общего вида. Поэтому значительное внимание уделяется вопросу расширения применимости методов ГП. В [10] приводятся методы преобразования дополнительного, но весьма ограниченного класса алгебраических задач в эквивалентные задачи ГП. Первая попытка исправить это положение была предпринята Пасси и Уальдом [14]. Они обобщили некоторые понятия и теоремы классического ГП для обобщенных полиномов без ограничения на знак коэффициентов. Однако большинство важных теорем ГП даже для этого случая не верны. В работе Даффина [7] эти трудности частично были преодолены даже для несколько более общего класса алгебраических задач.

Класс задач, для решения которых можно применять методы ГП, можно существенно расширить: в [10] показано, что любая корректно поставленная алгебраическая задача может быть преобразована в эквивалентную задачу со знакопеременными полиномами, которая затем при помощи преобразований, описанных в [7], преобразуется в эквивалентную позиномиальную задачу.

Нами впервые было показано, что методы ГП могут быть применены при решении задач оптимизации, содержащими функции с постоянной эластичностью замещения (CES):

$$U(x, y) = A(\alpha x^{-\rho} + (1 - \alpha)y^{-\rho})^{-n/\rho}, \quad \rho \geq -1, \quad n > 0, \quad A > 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Функции этого класса широко используются в экономических моделях. Степень взаимозаменяемости факторов в экономике может варьироваться, это является причиной рассмотрения производственной функции с фиксированной, но произвольной величиной эластичности замещения.

В литературе описаны многочисленные задачи ГП, которые возникают в следующих областях: оптимальное планирование, техническое проектирование, исследование химического равновесия [10], потоки в сетях [11], оптимальное управление с линейными уравнениями движения [15], теория кодирования [3], управление запасами [18], системы связи [4], региональная экономика [12], автоматизированное проектирование [13], расчет рисков [2].

Все найденные нами задачи ГП были включены в банк задач, состоящий на данный момент из 74 объектов. Банк задач представляет из себя текстовый файл в csv-формате. Для каждой задачи указывается: источник, из которого она взята, данные задачи, оптимальное решение и значение целевой функции.

Для решения задач ГП нами был реализован двойственный метод, предложенный в [16]. Суть этого метода состоит в том, что исходной задаче ГП с ограничениями в стандартной постановке ставится в соответствие пара эквивалентных задач (прямая и двойственная), которые являются задачами обобщенного линейного программирования. Такая замена позволяет устранить вычислительные трудности, обычно

связанные с двойственностью, — наличие неактивных ограничений и недифференцируемость. Программная реализация является расширением пакета FinPlus [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухвалова В. В., Ковальчук А. В. MathProg — пакет прикладных программ на базе MS Excel. — В сб.: Материалы работы Девятой международной конференции молодых ученых-экономистов «Предпринимательство и реформы в России». СПб.: ОЦЭиМ, 2003.
2. Судаков Р. С., Яцко А. И. Элементы прикладной теории геометрического программирования. М.: Знание, 2004.
3. Chang Y. O., Karlof J. K. Large Scale Geometric Programming: An Application in Coding Theory. — Comput. Oper. Res., 1994, v. 21, № 7, p. 747–755.
4. Chiang M. Geometric programming for communication systems. — Found. Trends Commun. Inform. Theory, 2005, v. 2, № 1, p. 1–156.
5. Dinkel J. J., Elliott W. H., Kochenberger G. A. Computational aspects of cutting plane algorithms for geometric programming problems. — Math. Progr., 1977, v. 13, p. 200–220.
6. Duffin R. J. Linearizing geometric programs. — SIAM Rev., 1970, v. 12, p. 211–227.
7. Duffin R. J. Geometric programming with signomials. — J. Optim. Theory Appl., 1973, v. 11, p. 3–35.
8. Duffin R. J., Peterson E. L. Duality theory for geometric programming. — SIAM J. Appl. Math., 1966, v. 14, № 6, p. 1307–1349.
9. Duffin R. J., Peterson E. L. The proximity of algebraic geometric programming to linear programming. — Math. Progr., 1972, v. 3, p. 250–254.
10. Duffin R. J., Peterson E. L., Zener C. Geometric programming — theory and application. New York: John Wiley and Sons, 1967.
11. Hall M. A., Peterson E. L. Traffic equilibria analyzed via geometric programming. — In: Proceedings of the International Symposium on traffic equilibrium methods. /Ed. by M. Florian. Berlin: Springer–Velag, 1976, p. 53–109.
12. Kadas A. S. An Application of Geometric Programming to Regional Economics. — Papers of the Regional Sci. Assoc., 1975, v. 34, p. 95–106.
13. Paoluzzi A. Geometric programming for computer-aided design. New York: John Wiley and Sons, 2003.
14. Passy U., Wilde D. J. Generalized polynomial optimization. — SIAM J. Appl. Math., 1967, v. 15, p. 1344–1356.
15. Peterson E. L. Geometric programming. — SIAM Rev., 1976, v. 18, № 1, p. 1–51.
16. Rajgopal J., Bricker D. L. Solving Posynomial Geometric Programming Problems via Generalized Linear Programming. — Comput. Optim. Appl., 2002, v. 21, p. 95–109.
17. Reklaitis G. V., Wilde D. J. Geometric programming via a primal auxiliary problem. — AIIE Trans., 1974, v. 6, p. 308–317.
18. Worrall B. M., Hall B. The analysis of an inventory control model using posynomial geometric programming. — Internat. J. Production Res., 1982, v. 20, № 5, p. 657–667.
19. Zener C. Engineering Design by Geometric Programming. New York: John Wiley, 1971.