

Е. Ю. Каримова, И. Ю. Кобысова, Т. Ю. Шерстюк
(Чита, ЧитГУ). **Тригонометрические операторы Баскакова и расчет цифровых фильтров нижних частот.**

Цифровые фильтры нижних частот. Цифровые фильтры имеют применение (см. [4]) в радиолокации, обработке речевых сигналов и многих других областях. Математическая модель цифрового фильтра с конечной импульсной характеристикой представляется дискретной сверткой следующего вида $y(j) = \sum_{m=0}^N h(m)x(j-m)$, где $x(j)$ — входной сигнал, $y(j)$ — выходной сигнал, $h(j)$ — импульсная характеристика фильтра. Известно (см. [4]), что импульсная характеристика фильтра нижних частот с линейной фазой представляется в виде

$$h(j) = W(j, M) \frac{\sin(j-M)\omega_c}{\pi(j-M)}, \quad (1)$$

при $j = 0, 1, \dots, M-1, M+1, \dots, 2M$ ($h(M) = \omega_c/\pi$), где ω_c — частота среза, $W(j, M)$ — взвешивающие множители.

О качестве цифрового фильтра судят по поведению функции $H(\omega) = \sum_{j=0}^{2M} h(j)e^{-i\omega j}$, $\omega \in [-\pi, \pi]$, где $h(j)$ определяется согласно (1). Модуль этой функции можно найти по формуле $|H(\omega)| = |L_n(\chi_c(t), \omega)|$, где $\chi_c(t) = 1$ при $t \in [-c, c]$, $\chi_c(t) = 0$ при $t \in [-\pi, \pi] \setminus [-c, c]$, L_n — некоторый метод суммирования рядов Фурье

$$L_n(f(t), \omega) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} (a_j \cos jt + b_j \sin jt), \quad (2)$$

где a_j, b_j — коэффициенты Фурье, а параметры формул (1) и (2) связаны между собой следующим образом: $n = M$, при $j = 0, 1, \dots, M$ имеем $W(M+j, M) = \lambda_{j,n}$, $W(M-j, M) = W(M+j, M)$ (см. [3], [4]).

В [1] показано, что для исследования качества фильтра можно вместо $|L_n(\chi_c(t), \omega)|$ исследовать поведение функции $|L_n(\theta(t), \omega)|$, где $\theta(t)$ — не зависящая от ω_c функция Хевисайда: $\theta(t) = 1$ при $t \in [0, \pi]$, $\theta(t) = 0$ при $t \in (-\pi, 0)$.

Тригонометрические операторы Баскакова. Эти операторы введены В. А. Баскаковым в работе [2]. Они (в записи со свернутым ядром) имеют вид

$$M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(f(t), \omega) = 2^{m-1}(\pi n)^{-1} \prod_{j=1}^m \sin^2 \frac{\pi k_j}{n} \\ \times \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin^2 \frac{t}{2} \prod_{j=1}^m \left(\cos t - \cos \frac{2\pi k_j}{n} \right) \right)^{-1} f(t+\omega) \sin^2 \frac{nt}{2} dt.$$

Они являются методами суммирования рядов Фурье. Удобство исследования приближения ими функции Хевисайда объясняется тем, что

$$M_n^{[m](k)}(\theta(t), 2rn^{-1}) = 0, 5 + G_{[m](k)}(r) + o(1),$$

где $G_{[m](k)}(r) = \pi^{2m-1} \prod_{j=1}^m (k_j)^2 \int_0^r (u^2 \prod_{j=1}^m (k_j^2 \pi^2 - u^2))^{-1} \sin^2(u) du$. Удалось выяснить, что метод взвешивания, полученный на основе множителей суммирования операторов $\lambda M_n^{1} + (1-\lambda)M_n^{[1](4)}$, где $\lambda \approx 0,6708$, имеет преимущества перед известным методом Ланцоша (см. [5]).

Приближение операторами Баскакова функций вблизи точек разрыва производных. Основной результат здесь заключается в следующем (см. [6]). Пусть зафиксировано целое число $i > 0$. Пусть, далее, 2π -периодическая функция $f(t)$ и точка $x \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяют следующим ограничениям: 1) $f(t)$ имеет непрерывную $(i-1)$ -ю производную (в случае $i = 1$ непрерывна сама функция $f(t)$);

2) существует такое $c > 0$, что i -я производная непрерывна на $[x - c, x]$ и на $[x, x + c]$. Тогда, для любого действительного $r > 0$ выполняется (если $i \leq 2m$) равенство

$$M_n^{[m]}(f(t), x + 2rn^{-1}) = f(x + 2rn^{-1}) + (i!)^{-1}(-1)^{i+1}\Phi_i(r) \times \left(f_+^{(i)}(x) - f_-^{(i)}(x)\right)n^{-i} + o(n^{-i}), \quad (3)$$

где $\Phi_i(r) = 2^i \pi^{2m-1} \prod_{j=1}^m (k_j)^2 \int_r^\infty (1 - r/t)^i (\prod_{j=1}^m (\pi^2 k_j^2 - t^2))^{-1} t^{i-2} \sin^2 t \, dt$.

Так как $\Phi_{2i}(0) = 0$ (см. [6]), операторы Баскакова можно применять при приближении сплайнов полиномами.

Ограничительные неравенства. Операторы Баскакова при $m = 1$ являются частным случаем операторов $L_n(f(t), x) = (1/J_n) \int_{-\pi}^\pi f(t+x) V_n(t) \, dt$, где $J_n = \int_{-\pi}^\pi V_n(t) \, dt$, $V_n(t)$ — четное тригонометрическое ядро, меняющее знак в точках $t = \pm h_n$ ($h_n \downarrow 0$). Для приложения весьма важно знать принципиальные возможности подобных операторов. А эти возможности «регламентируются» так называемыми «ограничительными неравенствами». Приведем одно из них:

$$2h_n + h_n^{-1} \beta_n^{(2)} \geq \frac{\pi}{\rho(n) + 1}.$$

Здесь $\rho(n)$ — размерность (как полинома) $V_n(t)$, $\beta_n^{(2)} = \|L_n((t-x)^2, x)\|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абакумов Ю. Г., Карымова Е. Ю., Долгов С. В. Проектирование цифровых фильтров нижних частот с линейной фазой и задача аппроксимации функции Хевисайда. — Вестник ЧитГУ, 2003, в. 29, с. 143–149.
2. Баскаков В. А. Об операторах класса S_{2m} , построенных на ядрах Фейера. — В сб.: Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: ТвГУ, 2001, с. 5–11.
3. Карымова Е. Ю. Приближение периодической функции Хевисайда средними операторов M_n^{1} и $M_n^{[1](k)}$ Баскакова. — В сб.: Методы математического моделирования и информационные технологии. Труды института прикладных математических исследований КарНЦ РАН. В. 5. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2004, с. 43–56.
4. Рабинер Л., Голд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978, 723 с.
5. Хемминг Р. В. Численные методы. М.: Наука, 1972, 400 с.
6. Шерстюк Т. Ю. О некоторых величинах, характеризующих аппроксимативные свойства операторов Баскакова. — Вестник ЧитГУ, 2006, с. 130–136.