

Е. А. Семенчин, М. М. Бостанова (Карачаевск, КЧГУ). Методика построения методом итераций решения обобщенной модели Леонтьева при вогнутых нелинейностях.

Обобщенная балансовая модель Леонтьева имеет вид [1]:

$$x = Ax + b, \quad x \geq \bar{0}, \quad (1)$$

где x, b — элементы банахова пространства $\mathbf{B}$, A — оператор (линейный или нелинейный), определенный в $\mathbf{B}$ (в случае конечномерного пространства, т. е. при $\mathbf{B} = \mathbf{R}_+^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n): x \geq 0\}$, обобщенная модель Леонтьева совпадает с конечномерной).

В работе, представленной данным сообщением, в качестве оператора A выступает оператор $T(x)$, определяемый соотношением [1]:

$$\begin{aligned} T[x_i(t)] &= \sum_{j=1}^m \varphi_{ij}(t) x_1^{\alpha_{ij}^{(1)}}(t) x_2^{\alpha_{ij}^{(2)}}(t) \cdots x_n^{\alpha_{ij}^{(n)}}(t) \\ &+ \sum_{j=1}^n \int_a^b K_{ij}(t, s) x_1^{\beta_{ij}^{(1)}}(s) x_2^{\beta_{ij}^{(2)}}(s) \cdots x_n^{\beta_{ij}^{(n)}}(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\alpha_{ij}^{(s)}, \beta_{ij}^{(s)} \geq 0$, $\sum_{s=1}^n \alpha_{ij}^{(s)} < 1$, $\sum_{s=1}^n \beta_{ij}^{(s)} < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$, $\varphi_{ij}(t)$, $K_{ij}(t, s)$ — непрерывные, неотрицательные при $t \in [a, b]$, $(t, s) \in [a, b] \times [a, b]$, монотонные по t функции.

Из теоремы 3.2, приведенной в [1], легко следует, что система уравнений

$$\begin{aligned} \lambda x_i(t) &= \sum_{j=1}^m \varphi_{ij}(t) x_1^{\alpha_{ij}^{(1)}}(t) x_2^{\alpha_{ij}^{(2)}}(t) \cdots x_n^{\alpha_{ij}^{(n)}}(t) \\ &+ \sum_{j=1}^n \int_a^b K_{ij}(t, s) x_1^{\beta_{ij}^{(1)}}(s) x_2^{\beta_{ij}^{(2)}}(s) \cdots x_n^{\beta_{ij}^{(n)}}(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (3)$$

для каждого $\lambda \in (0, \infty)$ имеет единственное решение $\bar{x} = \bar{x}^{(\lambda)}(t)$, принадлежащее составляющей $C(\bar{x}_0)$, $\bar{x}_0 = (1, \dots, 1)$, конуса K , которое может быть получено методом последовательных приближений (итераций):

$$\bar{x}_{k+1}^{(\lambda)}(t) = \frac{1}{\lambda} T[\bar{x}_k^{(\lambda)}(t)], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где $\bar{x}_k^{(\lambda)}(t)$ сходится по норме в пространстве $C_n[a, b]$ (здесь сохранены все обозначения из [1]).

Предполагая, что условия данного утверждения выполнены, можно предложить следующий алгоритм построения решения продуктивной модели (3) в заданный момент времени $t \in [a, b]$.

1. Полагаем $\bar{x}_0^{(\lambda)}(t) = (1, \dots, 1)$.

2. Из (4) последовательно находим $\bar{x}_1^{(\lambda)}(t), \bar{x}_2^{(\lambda)}(t), \dots$, проверяя при каждом $k = 1, 2, \dots$ справедливость условия

$$\|\bar{x}_k^{(\lambda)}(t) - \bar{x}_{k-1}^{(\lambda)}(t)\| < \varepsilon, \quad (5)$$

где $\varepsilon > 0$ — погрешность, с которой надо найти решение. Если при заданном k условие выполняется, то процесс вычислений завершаем и полагаем $\bar{x}^{(\lambda)}(t) = \bar{x}_k^{(\lambda)}(t)$. Если оно не выполнено, то переходим от k к $(k + 1)$ и т. д.

Данный алгоритм реализован в виде программного продукта «ReshPOML».

П р и м е р. Пусть $a = 0$, $b = 3$, $\lambda = 1$, $m = n = 2$,

$$\alpha^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0,5 & 0,7 \end{pmatrix}, \quad \alpha^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,25 \\ 0,1 & 0,15 \end{pmatrix}, \quad \beta^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,25 \\ 0,3 & 0,1 \end{pmatrix},$$

$$\beta^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,09 & 0,1 \\ 0,15 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad K(t, s) = \begin{pmatrix} 1 & t+s \\ 2t+s & t+2s \end{pmatrix}, \quad \varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 2t & 3t \end{pmatrix},$$

$$\bar{x}_0^{(1)} = (1, 1), \quad \varepsilon = 0,001, \quad t \in [0, 3].$$

Тогда с помощью программного продукта «ReshPOML» для момента времени $t_1 = 0,5$ с заданной погрешностью $\varepsilon = 0,001$ находим $\bar{x}(t_1) \approx (52,029842; 475,142092)$ (для этого потребовалось $k = 22$ шага).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисенко Т.И. Элементы математической экономики. Ставрополь: Изд-во Сев-КавГТУ, 2000, 115 с.