М. А. А р и с т о в а, **М. С. М а т в е й ч у к** (Ульяновск, УлГПУ, Казань, КГУ). **Меры на проекторах с вероятностным ядром.**

Оператор $\mathcal{J}$ в комплексном гильбертовом пространстве (г. п.) H с произведением $(\cdot,\cdot)$ называется *сопряжением*, если $(\mathcal{J}x,\mathcal{J}y)=(y,x)$ и $\mathcal{J}(\lambda x+\beta y)=\overline{\lambda}\mathcal{J}x+\overline{\beta}\mathcal{J}y$, для любых $x,y\in H$ и $\lambda,\beta\in C$. Множество $H_{\mathfrak{R}}=\{x\in H\colon \mathcal{J}x=x\}$ — вещественное г. п., $\dim H=\dim H_{\mathfrak{R}}$. Пусть $P=\{p\in B(H)\colon p=p^2,\ p=\mathcal{J}p^*\mathcal{J}\}$. Отметим, что $p\in P \iff p^*\in P$, P — аналог решетки $B^{pr}(H)$ всех ортогональных проекторов в H и относительно *порядка*: $p\leqslant q \iff p=qp$ и *ортодополнения*: $p\ \to\ p^{\perp}=I-p$ — *квантовая логика*; $p\in P$ — одномерный $\iff$ $p=p_x=(Jx,x)(\cdot,\mathcal{J}x)x$, где $|(x,\mathcal{J}x)|=1$; p_x — *ортогональный* $(p_x=p_x^*)$ $\iff$ $x\in H_{\mathfrak{R}}$. Пусть $\Pi=P\cap B^{pr}(H_{\mathbf{R}})$. Отметим, что $p\in\Pi \iff \mathcal{J}p\mathcal{J}=p$ и $p\in P$, Π изоморфно $B^{pr}(H_{\mathfrak{R}})$. Для любого $e\in\Pi$, $0<e<I$, множество $H_{\mathfrak{R}}^e=\lim_R\{eH_{\mathfrak{R}}+ie^{\perp}H_{\mathfrak{R}}\}$ — вещественное г. п. Пусть $\mathcal{P}e=\{p\in P\colon pH_{\mathfrak{R}}^e\subseteq H_{\mathfrak{R}}^e\}$. В силу $\mathcal{J}H_{\mathfrak{R}}^e=H_{\mathfrak{R}}^e$, $p\in\mathcal{P}_e \iff p^*\in\mathcal{P}_e$, P_e — гиперболическая логика. Можно показать, что $P=\cup_{e\in\Pi}\mathcal{P}_e$. Таким образом, P существенно богаче сферической и гиперболической логик.

Отображение $\mu\colon P\to R$ называется *мерой*, если $\mu(P)=\sum\mu(p_i)$ для любого разбиения $p=\sum p_i$. Мера μ — *вероятностная*, если $\mu(\cdot)\geqslant 0$ и $\mu(I)=1$; μ — *ограниченная*, если $|\mu(p)|<c\|p\|$ для любого $p\in P$ и некоторого c; μ — *самосопряженная*, если $\mu(p)=\mu(p^*)$ для любого $p\in P$. *Ядром* меры μ назовем ее сужение на Π. Известно: 1) $\mu\colon P\in[0,1]$ — вероятность $\iff$ $n=\dim H<\infty$ и $\mu(\cdot)=n^{-1}\mathrm{tr}(\cdot)$; 2) для всякой вероятностной меры ν на $B^{pr}(\mathcal{H})$, $\dim\mathcal{H}\geqslant 3$, существует такой единственный неотрицательный ядерный опрератор A, что $\nu(p)=\mathrm{tr}\,(Ap)$.

Теорема 1. *Пусть* $\dim H=\infty$ *и пусть* $\mu\colon P\to R$ *— самосопряженная мера с вероятностным ядром. Тогда* $\mu(p)=\mathfrak{R}\,\mathrm{tr}\,(Ap)$, *для любого* $p\in P$. *Здесь* A *— неотрицательный ядерный оператор, определяемый ядром меры* μ.

Пусть $\dim H<\infty$. Существуют неограниченные меры: 1) с нулевым ядром; 2) с вероятностным ядром. Теорему 2 интересно сравнить с аналогичным утверждением для гиперболического случая.

Теорема 2. *Пусть* $3\leqslant|rmdim H<\infty$ *и* $\mu\colon P\to R$ *— самосопряженная мера. Следующие условия равносильны*: 1) μ *— ограниченна*; 2) *существует такой оператор* T, *что* $\mu(p)=\mathfrak{R}\,\mathrm{tr}\,(Tp)$, *для любого* $p\in P$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азизов Т. Я.*, *Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986, 352 с.