В. А. Ивницкий, **О. В. Ивницкий** (Москва, ВНИИЖТ, МИИТ). **Нахождение нестационарных математических ожиданий количества «нетерпеливых» требований в узлах замкнутых марковских сетей массового обслуживания.**

В работе, представленной данным сообщением, для нестационарных моментов замкнутых марковских сетей массового обслуживания находится система линейных дифференциальных уравнений первого порядка размерности, равной числу узлов сети без одного, и устанавливаются необходимые и достаточные условия ее существования. Для решения задачи применяется метод, являющийся обобщением метода «динамики средних», который предложен в [1].

Рассматривается замкнутая сеть массового обслуживания (ЗСеМО), состоящая из m узлов, перенумерованных числами от 1 до m. Каждый узел представляет собой систему массового обслуживания. Сеть обслуживает N требований одного типа. Если в момент времени t в i-м узле находится на обслуживании n_i требований, то в интервале $(t, t+\Delta t)$ с вероятностью $\mu_i n_i \Delta t + o(\Delta t)$ заканчивается обслуживание одного требования. Если требование закончило обслуживаться в i-м узле, то оно с вероятностью P_{ij} мгновенно направляется в j-й узел, $\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1$, $i = 1, \ldots, m$. Матрица $(P_{ij})_{m\times m}$ неразложима. Число каналов обслуживания в каждом узле равно N, т. е. ожидания обслуживания нет.

Требования также являются «нетерпеливыми», т. е. если в момент времени t в i-м узле находится на обслуживании n_i требований, то в интервале $(t, t+\Delta t)$ с вероятностью $\alpha_i n_i \Delta t + o(\Delta t)$ из узла уходит одно требование, не дожидаясь конца его обслуживания. Если требование ушло из i-го узла, не дожидаясь конца обслуживания, то оно с вероятностью $\overline{P}_{ij}$ мгновенно направляется в j-й узел, $\sum_{j=1}^{m} \overline{P}_{ij} = 1$, $i = 1, \ldots, m$. Матрица $(\overline{P}_{ij})_{m\times m}$ также неразложима.

Введем случайный процесс $\zeta(t) = \{\nu_1(t), \ldots, \nu_m(t)\}$, где ν_i — число требований в i-м узле в момент времени t, $\mathbf{M}\,\nu_i(t) = n_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$. В предпосылках постановки задачи $\zeta(t)$ является марковским случайным процессом. В момент времени $t = 0$ в i-м узле находится на обслуживании $n_i(0)$ требований, $\sum_{i=1}^{m} n_i(0) = N$. Требуется определить нестационарные математические ожидания количества требований в узлах ЗСеМО $n_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$.

Теорема. *Для того чтобы нестационарные математические ожидания количества требований в узлах замкнутой марковской сети массового обслуживания* $n_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, *определялись следующей системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка*:

$$n_i'(t) = -(\mu_i + \alpha_i + \mu_m P_{mi} + \alpha_m \overline{P}_{mi}) n_i(t) + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{m-1} (\mu_j P_{ji} + \alpha_j \overline{P}_{ji} - \mu_m P_{mi} - \alpha_m \overline{P}_{mi})$$
$$\times\, n_j(t) + N(\mu_m P_{mi} + \alpha_m \overline{P}_{mi}), \quad i = 1, \ldots, m-1, \quad n_m(t) = N - \sum_{i=1}^{m} n_i(t), \tag{1}$$

необходимо и достаточно выполнения трех условий:

1) *времена обслуживания и пребывания требований в узлах должны иметь экспоненциальные распределения с параметрами, не зависящими от времени и состояния ЗСеМО*;

2) *переходные вероятности* P_{ij} *и* $\overline{P}_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, m$, *не должны зависеть от времени и состояния ЗСеМО*;

3) *число каналов обслуживания в каждом узле должно быть равно* N.

З а м е ч а н и е. В общем случае, когда распределения P_{ij} и $\overline{P}_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, m$, не совпадают, даже в стационарном случае нет замкнутого аналитического решения для вероятностей состояний рассматриваемой ЗСеМО.

Обозначим $\widetilde{n}_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} n_i(t)\,dt$, $i = 1, \ldots, m$. Применяя к системе уравнений (1) преобразование Лапласа, получаем

$$\widetilde{n}_i(s)(s+\mu_i+\alpha_i+\mu_m P_{mi}+\alpha_m \overline{P}_{mi}) = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{m-1} (\mu_j P_{ji}+\alpha_j \overline{P}_{ji}-\mu_m P_{mi}-\alpha_m \overline{P}_{mi})\widetilde{n}_j(s)$$
$$+s^{-1}N(\mu_m P_{mi}+\alpha_m \overline{P}_{mi}), \qquad i=1,\ldots,m-1, \quad \widetilde{n}_m(s)=s^{-1}N-\sum_{i=1}^{m-1}\widetilde{n}_i(s). \tag{2}$$

Система уравнений (2) является системой линейных алгебраических уравнений и может решаться известными методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вентцель Е. С.* Введение в исследование операций. М.: Советское радио, 1964, 388 с.