

В. И. Масол, С. В. Поперешняк (Киев, КНУ). **Распределение рангов слабо- и сильнозаполненных случайных матриц в поле GF(2).**

В данном докладе представлен обзор результатов о распределении ранга слабозаполненной матрицы в поле GF(2), в который включены, в частности, работы [1]–[3]. Кроме того, приводятся теоремы о распределении ранга сильнозаполненной случайной матрицы в поле GF(2).

Рассмотрим систему уравнений в поле GF(2) вида

$$\sum_{j=1}^n x_j a_j^{(i)} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Обозначим L событие, состоящее в том, что матрица коэффициентов $\|a_j^{(i)}\|$ системы (1) не имеет единичных строк и столбцов.

Обозначим ν_{nm_0} число нетривиальных решений системы (1), $m_0 = n - N$, m_0 — фиксированное число любого знака.

Предположим, что $a^{(i)} = (a_1^{(i)}, \dots, a_n^{(i)})$ ($i = 1, \dots, N$) — независимые (0,1)-векторы.

Наряду с (1) рассмотрим укороченную систему уравнений

$$\sum_{j=1}^n x_j a_j^{(i)} = 0, \quad i = 1, \dots, n - m, \quad m \geq m_0, \quad (2)$$

число нетривиальных решений которой обозначим ν_{nm} . Пусть $\xi_m(x)$ — индикатор события: вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ является решением системы (2). Тогда $\nu_{nm} = \sum_{x \neq 0} \xi_m(x)$. Число единичных компонент вектора x будем обозначим $|x|$.

Теорема 1. Пусть для некоторых последовательностей $m_q \rightarrow \infty$, $q \rightarrow \infty$, $\psi_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ выполнено $\lim_{q \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [M(\nu_{nm_q}/L) - 2^{m_q}] \leq 0$, $\lim_{q \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 < |x| < \psi_n} M(\xi_{m_q}(x)/L) = 0$,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \max \left| \mathbf{P} \left\{ \sum_{j=1}^n z_j^{(k)} a_j^{(n-m)} = \varepsilon^{(k)} \right\} / \sum_{j=1}^n z_j^{(i)} a_j^{(n-m)} = \varepsilon^{(i)}, \quad 1 \leq i < k \right\} - \frac{1}{2} \right| = 0,$$

$\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)} \in \{0, 1\}$, $k \geq 1$, где максимум берется по $m_0 \leq m \leq m_q$ и множеству наборов $z^{(1)}, \dots, z^{(k)}$ n -мерных (0,1)-векторов, для которых $|z^{(1)} + \dots + z^{(k)}| = |z^{(1)}| + \dots + |z^{(k)}|$, $|z^{(k)}| \geq \alpha \psi_n$, $\alpha > 0$. Тогда

$$\mathbf{P} \{ \nu_{nm_0} = 2^k - 1/L \} = 0, \quad k < r, \quad r = \max \{ m_0, 0 \}, \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \nu_{nm_0} = 2^k - 1/L \} = 2^{-k(k-r)} \left\{ \prod_{i=1}^{k-r} (1-2^{-i}) \right\}^{-1} \prod_{i=k+1}^{\infty} (1-2^{-i}), \quad k \geq r. \quad (4)$$

Теорема 2. Пусть $a_j^{(i)}$ ($i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, n$) — независимые случайные величины с распределением $\mathbf{P} \{ a_j^{(i)} = 1 \} = 1 - \mathbf{P} \{ a_j^{(i)} = 0 \} = p_{ij} = 1 - q_{ij}$, $q_{ij} = (\ln n - \omega_{ij})/n$, $-c \ln n \leq \omega_{ij} \leq \mu \ln n$, $-\infty < \mu \leq 1/3 - \varepsilon(n)$, $\varepsilon(n) \rightarrow 0$, $\varepsilon(n) \ln n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$,

$$\sum_{i=1}^N \exp \left\{ -n \min_{1 \leq j \leq n} q_{ij} \right\} - \exp \left\{ -n \max_{1 \leq j \leq n} q_{ij} \right\} = o(1),$$

$$\max_{1 \leq i \leq N} \frac{\sqrt{n}}{\ln n} \frac{\exp \{ \sum_{j=1}^n \omega_{ij}/n \}}{\sum_{i=1}^N \exp \{ \sum_{j=1}^n \omega_{ij}/n \}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty;$$

$$\max_{1 \leq j \leq n} \frac{\sqrt{n}}{\ln n} \frac{\exp\{\sum_{i=1}^N \omega_{ij}/n\}}{\sum_{j=1}^n \exp\{\sum_{i=1}^N \omega_{ij}/n\}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда имеют место соотношения (3), (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колчин В. Ф. Случайные графы. М.: Физматлит, 2004, 256 с.
2. Масол В. И., Поперешняк С. В. Граничний розподіл числа нетривіальних розв'язків системи лінійних випадкових булевих рівнянь з розрідженою матрицею коефіцієнтів. — Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика, 2006, № 1–2, с. 111–126.
3. Masol V. I., Popereshnyak S. V. Poisson estimates of distribution of the rank of a random matrix over the field. — Theory of Stochastic Processes, 2006, v. 12 (28), № 1–2, p. 106–115.