

**А. Л. Буляница** (Санкт-Петербург, ИАП РАН). **Условия эффективности метода простого интервального оценивания.**

Метод простого интервального оценивания (ПИО) [1], получил практическое развитие в области анализа больших массивов физико-химических данных [2]. Одним из его этапов является интервальное оценивание математического ожидания ограниченной промежутком  $[-\beta; \beta]$  случайной величины с плотностью распределения вероятностей  $f(x)$  как  $[\max(x_i - \beta), \min(x_i + \beta)]$ , т. е., оценка использует экстремальные порядковые статистики. Необходимым условием ее эффективности является ограниченность погрешностей [2], [3]. В противном случае, как известно, при неограниченных погрешностях существуют наиболее эффективные оценки метода максимального правдоподобия, отличные от ПИО-оценок.

Тогда ширина доверительного интервала  $\delta$  для математического ожидания на основе оценок выборочного среднего и медианы —  $\delta = O(1/\sqrt{N})$ , в то время, как для ПИО-оценки (экстремальной порядковой статистики)  $\delta = O(1/N)$ , и это гарантирует большую эффективность ПИО-оценок для объемов выборки, начиная с некоторого достаточно большого  $N$  [2].

Без значимой потери общности полагаем распределение симметричным с диапазоном  $[-1; 1]$  и доверительную вероятность  $P = 1 - 2Q$ . Тогда граница доверительного интервала ПИО-оценки ( $N$ -й порядковой статистики) определена условием  $F(1 - \delta/2) = Q^{1/N}$ . Оценим  $\delta$  при  $n \rightarrow \infty$  представив функцию распределения  $F(x)$  многочленом Тейлора 2-го порядка с  $x_0 = 1$ . Левая часть равенства примет вид  $F(1 - \delta/2) = 1 - f(1) \cdot \delta/2 + F''(1) \cdot \delta^2/8 + o(\delta^2)$ . Так как при  $n \rightarrow \infty \Rightarrow 1 - Q^{1/N} = O(1/N)$ ,  $\delta = O(1/N)$  гарантируется только при  $f(1) > 0$ . В противном случае  $\delta = O(1/\sqrt{N})$ , и ПИО-оценка может иметь меньшую эффективность по сравнению с альтернативными оценками медианы и выборочного среднего.

Подтверждающим примером является распределение Симпсона:  $f(x) = 1 - |x|$ , при  $|x| \leq 1$ , т. е.  $f(1) = 0$ . Полагая квантиль распределения Стьюдента  $t_{Q,N}$ , получим ширину доверительного интервала оценки выборочного среднего  $\delta = 2 \cdot t_{Q,N} \sqrt{1/6N}$  а ПИО-оценки  $\delta = \sqrt{-8 \ln(Q)/N}$ , т. е. возможно большую. Аналогичным свойством будут обладать косинусное распределение и ряд других, вырожденных на границе диапазона.

Таким образом, для обеспечения эффективности ПИО-оценки принцип ограниченности помехи должен быть дополнен условием ее невырожденности на границе диапазона.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Канторович Л. В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений. — Сибирский матем. ж., 1962, т. 3, № 5, с. 701–709.
2. Померанцев А. Л., Родионова О. Е. Построение многомерной градуировки методом ПИО. — Ж. аналит. химии, 2006, т. 61, № 10, с. 1032–1047.
3. Rajko R. Treatment of model error in calibration by robust and fuzzy procedures. — Anal. Letters, 1994, v. 27, p. 215–228.