

Е. М. Ж и т к о в а, И. Д. К о л е с и н (Санкт-Петербург, СПбГУ).
Применение принципа максимума к оптимизации плановой профилактики групп риска.

Плановая профилактика групп риска является одной из важнейших мер защиты той части городского населения, которая наиболее подвержена заражению (врачи, учителя, кондукторы, дети). Работа, представленная данным сообщением, посвящена отысканию оптимальных режимов вакцинации, учитывающих затраты на ее организацию.

Постановка задачи. Пусть N_1 — общее число лиц, относящихся к различным группам риска. Предположим, что на начальный момент среди них нет инфицированных и что заражение происходит в контакте с инфицированными лицами из прочего населения. Пусть число таких лиц N_2^F , а число восприимчивых — N_1^F . Поскольку представители групп риска рассеяны среди населения, заражением их друг от друга можно пренебречь. Пренебрегаем и обратным влиянием групп риска на массу городского населения (из-за малочисленности групп риска). Тогда процесс распространения инфекции в массе городского населения и заражение лиц из группы риска в период вакцинации описывается уравнениями

$$\frac{dN_1}{dt} = -aN_1N_2^F - u, \quad \frac{dN_1^F}{dt} = -a_FN_1^FN_2^F, \quad \frac{dN_2^F}{dt} = a_FN_1^FN_2^F - \beta N_2^F, \quad (1)$$

где u — интенсивность вакцинации, $\beta = 1/T_B$, T_B — характерная длительность болезни. Необходимо построить такую программу вакцинации $u(t)$, которая переводила бы процесс $N_1(t)$ за время T из состояния $N_1(0)$ в $N_1(T)$ с наименьшими затратами на лечение и вакцинацию. Примем

$$N_1(0) = N_1^0, \quad N_1(T) = 0 \quad (2)$$

(последнее означает завершение вакцинации) и составим критериальную функцию. Пусть c_L — удельная стоимость лечения, а c_V — удельная стоимость организации вакцинации (сюда же входит стоимость вакцины). Так как финансирование вакцинации и лечение лиц из групп риска осуществляется из одного источника (городской бюджет), то желательно минимизировать эти затраты:

$$S(u) = \int_0^T (c_L\lambda + c_Vu) dt \rightarrow \min_u \quad (3)$$

($\lambda = aN_1N_2^F$ — интенсивность заражения лиц из групп риска). Так как организация вакцинации в группах риска — дорогостоящее мероприятие, то санэпиднадзор разрабатывает несколько вариантов организации. В частности, быстрый, но дорогой, и более дешевый, но длительный. Первый с большим запасом укладывается в $[0, T]$, второй — не укладывается. Если u_1 — интенсивность первого, а u_2 — интенсивность второго ($u_1 \gg u_2$), то

$$u_1T > N_1^0 > u_2T, \quad u_1, u_2 = \text{const}, \quad u \in U = \{u_1, u_2\}. \quad (4)$$

Возможны четыре стратегии: либо $u = u_1$ на $[0, T]$, либо $u = u_2$ на $[0, T]$, либо $u = u_1$ до некоторого $t^* \in [0, T]$, а затем $u = u_2$, либо наоборот. Первая и вторая стратегии заведомо не годятся (в силу (2)), а из оставшихся двух требуется выбрать наилучший в смысле (3) и найти t^* .

Метод решения. Задача (1)–(4) принадлежит к классу задач оптимального управления с закрепленным правым концом. Для ее решения используем принцип максимума Понтрягина [1]. Построим функцию Гамильтона H и найдем ее производные:

$$H = -l_o(c_LaN_1N_2^F + c_Vu) + p(aN_1N_2^F - u),$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -l_0 c_V - p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial N_1} = aN_2^F(l_0 c_L + p).$$

Из условий $\partial H/\partial u = 0$, $p = 0$ вытекает следующая теорема.

Теорема. Если выполняется $c_L > c_V$ и $p(0) \in (-l_0 c_L, -l_0 c_V)$, то существует такой момент $t^* \in [0, T]$, что решение задачи (1)–(4) достигается при $u = u_1$ на интервале $[0, t^*)$ и $u = u_2$ на отрезке $[t^*, T]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2005, 400 с.