

М. И. Т о л о в и к о в (Череповец, ЧГУ). **Теорема о максимальном цепном представлении для цепей Маркова.**

Серии в случайных последовательностях неизменно привлекают внимание исследователей [1], [3]. Сформулированная ниже теорема является аналогом теоремы о максимальном цепном представлении А. Гессель [2]. Из нее с помощью подходящих подстановок мы получаем решение ряда задач о сериях в цепях Маркова.

Пусть $(X_n)_{n=0}^\infty$ — дискретная однородная цепь Маркова с конечным или счетным множеством состояний E . Пусть множество переходов этой цепи $E \times E$ разбито на два непересекающихся подмножества: $E = E_0 \cup E_1$. Свяжем с цепью $(X_n)_{n=0}^\infty$ последовательность случайных индикаторов $(I_n)_{n=1}^\infty$, определяемую следующим образом: $I_n = I\{(X_{n-1}, X_n) \in E_0\}$. Нашей целью является изучение распределения последовательности $(I_n)_{n=1}^\infty$.

Пусть строка $\pi = (p_i)_{i \in E}$ задает начальное распределение цепи $(X_n)_{n=0}^\infty$, $\Pi = (p_{ij})_{i,j \in E}$ — матрица переходных вероятностей этой цепи. Положим $\Pi_k = (p_{ij}^{(k)})$, $k = 0, 1$, где $p_{ij}^{(k)} = p_{ij}$ при $(i, j) \in E_k$, $p_{ij}^{(k)} = 0$ в противном случае. Тогда $\Pi_0 + \Pi_1 = \Pi$. Пусть $\mathbf{e}$ — строка из единиц и штрих обозначает транспонирование.

Будем рассматривать формальные степенные ряды от некоммутирующих переменных $y_0, y_1, \dots$. Обозначим Y^* множество всех произведений вида $y_{l_1} y_{l_2} \cdots y_{l_k}$, $l_i \geq 0$, $k \geq 0$ (при $k = 0$ это произведение считаем равным единице ε). Пусть

$$a(\mathbf{y}) = \sum_{y_{l_1} y_{l_2} \cdots y_{l_k} \in Y^* \setminus \{\varepsilon\}} \mathbf{P}\{I_1 = a_1, I_2 = a_2, \dots, I_n = a_n\} y_{l_1} y_{l_2} \cdots y_{l_k},$$

где $n = l_1 + l_2 + \cdots + l_k + k - 1$ и $l_1, l_2, \dots, l_k$ — длины последовательных серий из нулей в слове $a_1 a_2 \cdots a_n$ (серией из нулей мы называем максимальное подслово, состоящее из одних нулей).

Теорема.

$$a(\mathbf{y}) = \pi \left(\sum_{l \geq 0} \Pi_0^l y_l \right) \left(\mathbf{I} - \Pi_1 \sum_{l \geq 0} \Pi_0^l y_l \right)^{-1} \mathbf{e}',$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Производя подходящие подстановки вместо переменных $y_0, y_1, \dots$, из теоремы можно получить ряд результатов о распределении серий в последовательности $(I_n)_{n=0}^\infty$.

1. Положим $y_i = x^{i+1} y^i$, $i = 0, 1, \dots$, где переменные x и y коммутируют. Ряд $a(\mathbf{y})$ перейдет при такой подстановке в $a(x, y) = \sum_{n \geq 1, k \geq 0} A(n, k) x^n y^k$, где $A(n, k)$ равно вероятности того, что в последовательности $I_1, I_2, \dots, I_n$ ровно k нулей.

Следствие 1. $a(x, y) = x\pi(\mathbf{I} - (\Pi_1 + \Pi_0 y)x)^{-1} \mathbf{e}'$.

2. Положим $y_0 = x$, $y_i = x^{i+1} y$, $i \geq 1$, где переменные x и y коммутируют. Ряд $a(\mathbf{y})$ перейдет при этой подстановке в $d(x, y) = \sum_{n \geq 1, k \geq 0} D(n, k) x^n y^k$, где $D(n, k)$ равно вероятности того, что в последовательности $I_1, I_2, \dots, I_n$ ровно k непустых серий из нулей.

Следствие 2. $d(x, y) = x\pi(\mathbf{I} - \Pi_0 x(y - 1))(\mathbf{I} - \Pi x - \Pi_1 \Pi_0 x^2(y - 1))^{-1} \mathbf{e}'$.

3. Пусть $H_{r,s}(x) = \sum_{n \geq 1} h_{r,s}(n) x^n$, где $h_{r,s}(n)$ — вероятность того, что в последовательности $I_1, I_2, \dots, I_n$ любая серия из нулей имеет длину не более r , а любая серия из единиц — длину не более s .

Следствие 3. $H_{r,s}(x) = x\pi(\mathbf{I} + \sigma)(\mathbf{I} - \tau\sigma)^{-1}(\mathbf{I} + \tau)\mathbf{e}'$, где $\sigma = \sum_{1 \leq l \leq r} \Pi_0^l x^l$, $\tau = \sum_{1 \leq l \leq s} \Pi_1^l x^l$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-01-00035а) и совета по грантам Президента РФ (НШ-4129.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гончаров В.Л.* Из области комбинаторики. — Известия АН СССР, серия матем., 1944, т. 8, № 1, с. 3–48.
2. *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика. М.: Наука, 1990.
3. *Савельев Л.Я.* Серии в марковских последовательностях. — Сибирский матем. журнал, 1991, т. 32, № 4, с. 116–132.