М. И. Толовиков (Череповец, ЧГУ). **Одинаковая распределенность некоторых статистик перестановок, являющихся линейными функциями индикаторов инверсий.**

Пусть на множестве перестановок $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$ задано равномерное распределение вероятностей. Рассмотрим следующие случайные векторы и случайные величины, представляющие собой статистики перестановки π, являющиеся линейными функциями индикаторов инверсий: $I_{j,k} = I\{\pi_j > \pi_k\}$, $1 \leqslant j < k \leqslant n$.

1) Таблица инверсий перестановки π: $\mathrm{Inv}\,(\pi) = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, где $i_k = \sum_{s=1}^{k-1} I_{s,k}$, $1 < k \leqslant n$, $i_1 = 0$.

2) Число инверсий в перестановке π: $\mathrm{inv}\,(\pi) = \sum_{j=1}^{n} i_j$.

3) Вектор $\mathrm{MD}\,(\pi) = (md_1, md_2, \ldots, md_n)$, где $md_1 = i_1$, $md_k = i_k - i_{k-1} - 1 + k(1 - I_{k-1,k})$, $1 < k \leqslant n$.

4) Величина $\mathrm{md}(\pi) = \sum_{j=1}^{n} md_j = \mathrm{maj}\,(\pi) - \mathrm{des}(\pi) + i_n$, где $\mathrm{maj}\,(\pi)$ — главный индекс перестановки π, $\mathrm{des}\,(\pi)$ — число убываний в перестановке π.

Теорема 1. 1) *Векторы* $\mathrm{Inv}\,(\pi)$ *и* $\mathrm{MD}\,(\pi)$ *одинаково распределены.*

2) *Случайные величины* $\mathrm{inv}\,(\pi)$ *и* $\mathrm{md}\,(\pi)$ *одинаково распределены.*

Хорошо известно [1], что случайные величины $\mathrm{inv}\,(\pi)$ и $\mathrm{maj}\,(\pi)$ одинаково распределены. Из второго утверждения теоремы 1 вытекает асимптотическая одинаковая распределенность этих величин при $n \to \infty$. Утверждение теоремы 1 допускает следующее обобщение.

Пусть $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ — равномерно распределенная случайная перестановка на множестве $1, 2, \ldots, n$ и $L = \{l_1, l_2, \ldots, l_q\}$ — подмножество множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, $l_1 < l_2 < \ldots < l_q$. Рассмотрим ограничение перестановки π на L и определим случайные векторы $\mathrm{Inv}_L(\pi)$, $\mathrm{MD}_L(\pi)$ и случайные величины $\mathrm{inv}_L(\pi)$, $\mathrm{md}_L(\pi)$ следующим образом: $\mathrm{Inv}_L(\pi) = (i_{l_1}, i_{l_2}, \ldots, i_{l_q})$, где $i_{l_k} = \sum_{s=1}^{k-1} I_{l_s,l_k}$, $1 < k \leqslant q$, $i_{l_1} = 0$, $\mathrm{inv}\,(\pi) = \sum_{j=1}^{q} i_{l_j}$, $\mathrm{MD}_L(\pi) = (md_{l_1}, md_{l_2}, \ldots, md_{l_q})$, где $md_{l_1} = i_{l_1}$, $md_{l_k} = i_{l_k} - i_{l_{k-1}} - 1 + l_k(1 - I_{l_{k-1},l_k})$, $1 < k \leqslant q$, $md_L(\pi) = \sum_{j=1}^{q} md_{l_j}$.

Теорема 2. 1) *Векторы* $\mathrm{Inv}_L(\pi)$ *и* $\mathrm{MD}_L(\pi)$ *одинаково распределены.*

2) *Случайные величины* $\mathrm{inv}_L(\pi)$ *и* $\mathrm{md}_L(\pi)$ *одинаково распределены.*

Работа поддержана РФФИ (проект № 05–01–00035а) и советом по грантам Президента РФ (НШ-4129.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стенли Р. П.* Перечислительная комбинаторика. М.: Мир, 1985.