Е. А. Семенчин, А. С. Урусова (Карачаевск, КЧГУ). **Сведение обратной задачи в модели Леонтьева к задаче квадратичного программирования.**

Математическая модель Леонтьева

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \qquad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

где $x - i$ — объем выпуска i-го продукта, a_{ij} — количество единиц i-го продукта, идущего на производство единицы j-го продукта, y_i — величина спроса на i-й вид производимого продукта, призвана ответить на вопрос: можно ли в условиях данной технологии удовлетворить конечный спрос на производимые n продуктов. Предполагается, что a_{ij}, y_i, $i, j = 1, \dots, n$, заданы и, очевидно, $a_{ij} \geqslant 0$, $y_i \geqslant 0$, $i, j = 1, \dots, n$.

В [1] отмечается, что в рамках модели (1) может быть легко решена и одна из обратных задач: по заданным валовым выпускам $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ и матрице $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, \dots, n$, определить объемы конечного спроса $y = (y_1, \dots, y_n)^T$.

В работе, представленной данным сообщением, изучается следующая более сложная обратная задача: при заданных x_i, y_i, $i = 1, \dots, n$, найти $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, \dots, n$, т.е. при заданных объемах выпуска x_i и спроса y_i на каждый из n продуктов определить, какое количество a_{ij} единиц i-го продукта следует затратить для производства единицы j-го продукта.

Будем искать решение методом наименьших квадратов [2]. Для удобства записи перепишем уравнение (1) в матричном виде:

$$x = Ax + y, \tag{2}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$, A — квадратная матрица с элементами a_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$. Тогда поставленная обратная задача сводится к следующей: по заданным векторам x и y найти матрицу A с неотрицательными элементами, которая доставляет минимум $|(E - A)x - y|^2$, т.е. к задаче квадратичного программирования

$$|(E - A)x - y|^2 \to \min, \qquad A \geqslant 0, \tag{3}$$

где E — единичная матрица размера $n \times n$.

Задача (3) может быть легко решена с помощью средств Microsoft Excel.

Пример. Пусть рассматривается модель двухотраслевой экономики: $x_1 = 400$ — объем производимой продукции 1-й отраслью, $x_2 = 500$ — объем продукции, производимой 2-й отраслью; $y_1 = 150$, $y_2 = 250$ — объемы конечных продуктов соответственно 1-й и 2-й отраслей, предназначенных для непроизводственного потребления. Требуется найти $A = \{a_{ij}\}$, $a_{ij} \geqslant 0$, $i, j = 1, 2$, при которой выполняется (хотя бы приближенно) соотношение (1).

Решение. Согласно условию задачи, $x = (400, 500)^T$, $y = (150, 250)^T$. Задача (3) в данном случае принимает вид:

$$(250 - 400a_{11} + 500a_{12})^2 + (250 + 400a_{21} - 500a_{22})^2 \to \min, \quad a_{ij} \geqslant 0, \qquad i, j = 1, 2.$$

С помощью средств Microsoft Excel находим A: $a_{11} = 0,625$, $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{22} = 0,5$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колемаев В. А.* Математическая экономика. М.: Юнити, 1998, 240 с.
2. *Сизиков В. С.* Математические методы обработки результатов измерений. Спб.: Политехника, 2001, 240 с.